Complexité de semi-anneau des Polynômes de Schur

NOGNENG Dorian

LIX

20 Février 2017

Table des matières

Introduction - Polynômes de Schur

Polynômes de Schur :

Polynômes symétriques S_λ, indexés par une partition d'entiers $\lambda = (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_l)$.

Introduction - Polynômes de Schur

Polynômes de Schur :

Polynômes symétriques S_λ, indexés par une partition d'entiers $\lambda = (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_l)$.

À coefficients entiers ≥ 0.

Introduction - Polynômes de Schur

Polynômes de Schur :

Polynômes symétriques S_λ, indexés par une partition d'entiers $\lambda = (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_l)$.

À coefficients entiers ≥ 0.

Interviennent dans la théorie des représentations du groupe symétrique.

Introduction - Problème

On s'intéresse à la complexité du calcul des Polynômes de Schur, lorsqu'on n'autorise que les opérations $+$ et $\times$.

Table des matières

Définitions - semi-anneau

Complexité de semi-anneau :
Qui n'autorise que les oprations $+$ et $\times$.

Définitions - semi-anneau

Complexité de semi-anneau :
Qui n'autorise que les oprations $+$ et $\times$.

Exemple :
Le coût du calcul de $P(X) = X^4 + X$, pour X donné, est 3 opérations dans ce modèle.

$$X \times X \to X^2$$

$$X^2 \times X^2 \to X^4$$

$$X + X^4 \to P(X)$$

Définitions - Complexité

Cette complexité peut parfois changer si on autorise $-$ ou $/$.

Définitions - Complexité

Cette complexité peut parfois changer si on autorise $-$ ou $/$.

Exemples :

$P(X) = 14 = 2^4 - 2$

Définitions - Complexité

Cette complexité peut parfois changer si on autorise $-$ ou $/$.

Exemples :

$P(X) = 14 = 2^4 - 2$

$P(X) = X^7 + X^6 \cdot Y + X^5 \cdot Y^2 + X^4 \cdot Y^3 + X^3 \cdot Y^4 + X^2 \cdot Y^5 + X \cdot Y^6 + Y^7 = (X^8 - Y^8)/(X - Y)$

Définitions - Polynômes de Schur

Polynôme de Schur $S_\lambda(X_1, \ldots, X_k)$, indexé par la partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_l)$:

$$S_\lambda(X_1, \ldots, X_k) = \frac{\begin{vmatrix} {X_1}^{\lambda_k} & \ldots & {X_1}^{\lambda_1+k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ {X_n}^{\lambda_k} & \ldots & {X_k}^{\lambda_1+k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} {X_1}^{0} & \ldots & {X_1}^{k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ {X_k}^{0} & \ldots & {X_k}^{k-1} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} {X_1}^{\lambda_k} & \ldots & {X_1}^{\lambda_1+k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ {X_n}^{\lambda_k} & \ldots & {X_k}^{\lambda_1+k-1} \end{vmatrix}}{Van(X_1, \ldots, X_k)}$$

où $Van(X_1, \ldots, X_k) = \prod_{i<j}(X_j - X_i)$, $s_\lambda(X_1, \ldots, X_k) = 0$ si $l > k$

Définitions - Polynômes de Schur

Peuvent aussi être définis en utilisant le tableau semi-standard de λ.

Définitions - Polynômes de Schur

Peuvent aussi être définis en utilisant le tableau semi-standard de λ.

On remplit chaque case avec un X_i, i croissant sur chaque ligne, strictement croissant sur chaque colonne.

Définitions - Polynômes de Schur

Peuvent aussi être définis en utilisant le tableau semi-standard de λ.

On remplit chaque case avec un X_i, i croissant sur chaque ligne, strictement croissant sur chaque colonne.

Le produit d'un tel remplissage donne un monôme.

Définitions - Polynômes de Schur

Peuvent aussi être définis en utilisant le tableau semi-standard de λ.

On remplit chaque case avec un X_i, i croissant sur chaque ligne, strictement croissant sur chaque colonne.

Le produit d'un tel remplissage donne un monôme.

On somme tous les monômes obtenus par tous les remplissages possibles.

Table des matières

Complexité - Plan d'action

On s'intéresse au cas où $k << \lambda_1$, pour lequel on cherche la complexité du calcul de $S_\lambda(X_1, \ldots, X_k)$

Complexité - Plan d'action

On s'intéresse au cas où $k << \lambda_1$, pour lequel on cherche la complexité du calcul de $S_\lambda(X_1, \ldots, X_k)$

Plan d'action :

- Étudier le cas $l = 1$

Complexité - Plan d'action

On s'intéresse au cas où $k << \lambda_1$, pour lequel on cherche la complexité du calcul de $S_\lambda(X_1, \ldots, X_k)$

Plan d'action :

- Étudier le cas $l = 1$
- Généraliser en découpant des tranches de tableau.

Complexité - Cas $l = 1$

Si $\lambda = (\lambda_1)$, $S_\lambda(X_1, \ldots, X_k)$ est le polynôme complet :

$$S_\lambda(X_1, \ldots, X_k) = h_{\lambda_1}(X_1, \ldots, X_k) = \sum_{i_1 + \ldots + i_k = \lambda_1} {X_1}^{i_1} \ldots {X_k}^{i_k}$$

Complexité - Cas $l = 1$

Si $\lambda = (\lambda_1)$, $S_\lambda(X_1, \dots, X_k)$ est le polynôme complet :

$$S_\lambda(X_1, \dots, X_k) = h_{\lambda_1}(X_1, \dots, X_k) = \sum_{i_1+\dots+i_k=\lambda_1} {X_1}^{i_1} \dots {X_k}^{i_k}$$

La relation
$h_{a+b+1}(X_1, \dots, X_k) = \sum_{i=1}^{k} h_a(X_1, \dots, X_i) \cdot X_i \cdot h_b(X_i, \dots, X_k)$
permet de calculer h_{λ_1}, h_{λ_1+1} à partir de $h_{\left[\frac{\lambda_1-1}{2}\right]}$, $h_{\left[\frac{\lambda_1-1}{2}\right]+1}$.

Complexité - Cas $l = 1$

Si $\lambda = (\lambda_1)$, $S_\lambda(X_1, \ldots, X_k)$ est le polynôme complet :

$$S_\lambda(X_1, \ldots, X_k) = h_{\lambda_1}(X_1, \ldots, X_k) = \sum_{i_1+\ldots+i_k=\lambda_1} {X_1}^{i_1} \ldots {X_k}^{i_k}$$

La relation
$h_{a+b+1}(X_1, \ldots, X_k) = \sum_{i=1}^{k} h_a(X_1, \ldots, X_i) \cdot X_i \cdot h_b(X_i, \ldots, X_k)$
permet de calculer h_{λ_1}, h_{λ_1+1} à partir de $h_{[\frac{\lambda_1-1}{2}]}$, $h_{[\frac{\lambda_1-1}{2}]+1}$.

Par récurrence, on calcule $h_{\lambda_1}(X_1, \ldots, X_k)$ en temps logarithmique en λ_1.

Complexité - Cas général

On énumère les différents agencements de tranches possibles d'avoir dans un tableau semi-standard.

Complexité - Cas général

En analysant précisément la coût, on obtient :

$$CO\hat{U}T = k^{k^2\cdot(\frac{1}{4}+o(1))} \cdot O(\log(\lambda_1))$$

Table des matières

Conclusion

- Nous avons un algorithme pour évaluer un polynôme de Schur, en n'utilisant que les opérations $+$ et $\times$

Conclusion

- Nous avons un algorithme pour évaluer un polynôme de Schur, en n'utilisant que les opérations $+$ et $\times$

- Cette méthode est efficace pour un nombre de variables k petit.

Conclusion

QUESTIONS ?