Identités de partitions et résolution d'équations aux q-différences

Jehanne Dousse

Universität Zürich

25 avril 2016

Plan

Plan

Les partitions d'entiers

Définition

Une *partition* d'un entier positif n est une suite décroissante d'entiers strictement positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = n$. Les entiers $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont appelés les *parts* de la partition.

Exemple

Les 5 partitions de 4 sont

$$4, 3+1, 2+2, 2+1+1 \text{ and } 1+1+1+1.$$

On note $p(n)$ le nombre de partitions de n.

Séries génératrices

Soit $Q(n,k)$ le nombre de partitions de n en k parts distinctes. Alors

$$\begin{aligned}1+\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} Q(n,k) z^k q^n &= (1+zq)(1+zq^2)(1+zq^3)(1+zq^4)\cdots\\ &= \prod_{n\geq 1}(1+zq^n).\end{aligned}$$

Séries génératrices

Soit $Q(n,k)$ le nombre de partitions de n en k parts distinctes. Alors

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} Q(n,k) z^k q^n &= (1+zq)(1+zq^2)(1+zq^3)(1+zq^4)\cdots \\ &= \prod_{n \geq 1} (1+zq^n). \end{aligned}$$

Soit $p(n,k)$ le nombre de partitions de n en k parts. Alors

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} p(n,k) z^k q^n &= (1+zq+z^2q^2+\cdots)(1+zq^2+z^2q^4+\cdots)\cdots \\ &= \prod_{n \geq 1} \left(1+zq^n+z^2q^{2n}+\cdots\right) \\ &= \prod_{n \geq 1} \frac{1}{(1-zq^n)}. \end{aligned}$$

Identités de partitions

Théorème (Euler 1748)

Pour tout entier positif n, le nombre de partitions de n en parts distinctes est égal au nombre de partitions de n en parts impaires.

Identités de partitions

Théorème (Euler 1748)

Pour tout entier positif n, le nombre de partitions de n en parts distinctes est égal au nombre de partitions de n en parts impaires.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\prod_{n\geq 1}(1+q^n) &= \prod_{n\geq 1}\frac{(1+q^n)(1-q^n)}{1-q^n}\\ &= \prod_{n\geq 1}\frac{1-q^{2n}}{1-q^n}\\ &= \prod_{n\geq 1}\frac{1}{1-q^{2n-1}}.\end{aligned}$$

$\square$

Les identités de Rogers-Ramanujan

La première identité de Rogers-Ramanujan est l'identité de q-séries suivante :

Théorème (Rogers 1894, Rogers-Ramanujan 1919)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5k+1})(1-q^{5k+4})},$$

Les identités de Rogers-Ramanujan

La première identité de Rogers-Ramanujan est l'identité de q-séries suivante :

Théorème (Rogers 1894, Rogers-Ramanujan 1919)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5k+1})(1-q^{5k+4})},$$

Version partitions

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre de partitions de n telles que deux parts consécutives diffèrent d'au moins 2 est égal au nombre de partitions de n en parts congrues à 1 ou 4 modulo 5.

Les identités de Rogers-Ramanujan

La première identité de Rogers-Ramanujan est l'identité de q-séries suivante :

Théorème (Rogers 1894, Rogers-Ramanujan 1919)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5k+1})(1-q^{5k+4})},$$

Version partitions

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre de partitions de n telles que deux parts consécutives diffèrent d'au moins 2 est égal au nombre de partitions de n en parts congrues à 1 ou 4 modulo 5.

Identité du type Rogers-Ramanujan : "pour tout n, le nombre de partitions de n avec certaines conditions de différences est égal au nombre de partitions de n avec certaines conditions de congruences."

Plan

Le théorème

Théorème (Schur 1926)

Pour tout entier positif n, soit $A(n)$ le nombre de partitions de n en parts distinctes congrues à 1 ou 2 modulo 3 et $B(n)$ le nombre de partitions $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m$ de n telles que

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq \begin{cases} 3 & \text{if } \lambda_{i+1} \equiv 1,2 \mod 3, \\ 4 & \text{if } \lambda_{i+1} \equiv 0 \mod 3. \end{cases}$$

Alors $A(n) = B(n)$.

Exemple

Les partitions comptées par $A(10)$ sont 10, $8+2$, $7+2+1$ et $5+4+1$.
Les partitions comptées par $B(10)$ sont 10, $9+1$, $8+2$ et $7+3$.
Il y a 4 partitions dans les deux cas.

La preuve d'Andrews

Soit $b_i(m,n)$ le nombre de partitions $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m$ comptées par $B(n)$ avec m parts, telles que $\lambda_m \geq i$.

$$f_i(x) = f_i(x,q) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_i(m,n) x^m q^n.$$

On veut montrer que

$$f_1(1) = \prod_{j=0}^{\infty} (1+q^{3j+1})(1+q^{3j+2}).$$

La preuve d'Andrews

Soit $b_i(m,n)$ le nombre de partitions $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m$ comptées par $B(n)$ avec m parts, telles que $\lambda_m \geq i$.

$$f_i(x) = f_i(x,q) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_i(m,n) x^m q^n.$$

On veut montrer que

$$f_1(1) = \prod_{j=0}^{\infty} (1+q^{3j+1})(1+q^{3j+2}).$$

Par un raisonnement combinatoire, on montre que f_1 vérifie l'équation aux q-différences suivante

$$f_1(x) = (1 + xq + xq^2) f_1(xq^3) + xq^3(1 - xq^3) f_1(xq^6),$$

et la condition initiale $f_1(0) = 1$.

Résolution de l'équation aux q-différences

Idée : transformer l'équation aux q-différences

$$f_1(x) = (1 + xq + xq^2)f_1(xq^3) + xq^3(1 - xq^3)f_1(xq^6)$$

en une équation de récurrence d'ordre 1.

Résolution de l'équation aux q-différences

Idée : transformer l'équation aux q-différences

$$f_1(x) = (1 + xq + xq^2) f_1(xq^3) + xq^3(1 - xq^3) f_1(xq^6)$$

en une équation de récurrence d'ordre 1.
On pose

$$F(x) := f_1(x) \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - xq^{3n})}.$$

Par définition,

$$(1 - x)F(x) = (1 + xq + xq^2) F(xq^3) + xq^3 F(xq^6),$$

et $F(0) = 1$.

Résolution de l'équation aux q-différences

Définissons maintenant la suite $(A_n(q))_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$F(x) =: \sum_{n\geq 0} A_n(q)x^n.$$

On a alors

$$A_n(q)-A_{n-1}(q) = q^{3n}A_n(q)+q^{3n-2}A_{n-1}(q)+q^{3n-1}A_{n-1}(q)+q^{6n-3}A_{n-1}(q),$$

et $A_0(q) = 1$.

Résolution de l'équation aux q-différences

Définissons maintenant la suite $(A_n(q))_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$F(x) =: \sum_{n\geq 0} A_n(q)x^n.$$

On a alors

$$A_n(q)-A_{n-1}(q) = q^{3n}A_n(q)+q^{3n-2}A_{n-1}(q)+q^{3n-1}A_{n-1}(q)+q^{6n-3}A_{n-1}(q),$$

et $A_0(q) = 1$.
Donc

$$A_n(q) = \frac{(1+q^{3n-1})(1+q^{3n-2})}{(1-q^{3n})}A_{n-1}(q),$$

et en itérant

$$A_n(q) = \prod_{j=1}^{n} \frac{(1+q^{3j-1})(1+q^{3j-2})}{(1-q^{3j})}.$$

Résolution de l'équation aux q-différences

Lemme d'Abel

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ayant une limite finie lorsque $n \to \infty$. Alors

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Donc

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f_1(x) &= \lim_{x\to 1^-}\prod_{n=0}^{\infty}(1-xq^{3n})\sum_{m=0}^{\infty} A_m x^m \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{3n})\lim_{n\to\infty} A_n \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{3n})\prod_{j=1}^{\infty}\frac{(1+q^{3j-1})(1+q^{3j-2})}{(1-q^{3j})}. \qquad \square\end{aligned}$$

Plan

Les surpartitions

Définition

Soit n un entier positif. Une *surpartition* de n est une partition de n où la première occurence d'une part peut être surlignée.

Exemple

Les 8 surpartitions de 3 sont :

$$3, \overline{3}, 2+1, \overline{2}+1, 2+\overline{1}, \overline{2}+\overline{1}, 1+1+1, \text{ and } \overline{1}+1+1.$$

Les surpartitions

Définition

Soit n un entier positif. Une *surpartition* de n est une partition de n où la première occurence d'une part peut être surlignée.

Exemple

Les 8 surpartitions de 3 sont :

$$3, \overline{3}, 2+1, \overline{2}+1, 2+\overline{1}, \overline{2}+\overline{1}, 1+1+1, \text{ and } \overline{1}+1+1.$$

Soit $\overline{p}(n,k)$ le nombre de surpartitions de n avec k parts non surlignées. Alors

$$1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} \overline{p}(n,k) d^k q^n = \prod_{n \geq 1} \frac{1+q^n}{1-dq^n}.$$

Le théorème de Schur pour les surpartitions

Théorème (Lovejoy 2005)

Soit $A(k,n)$ le nombre de surpartitions de n en parts congrues à 1 ou 2 modulo 3 ayant k parts non surlignées. Soit $B(k,n)$ le nombre de surpartitions $\lambda_1 + \cdots + \lambda_s$ de n, ayant k parts non surlignées et satisfaisant les conditions de différence

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq \begin{cases} 0 + 3\chi(\overline{\lambda_{i+1}}) \text{ si } \lambda_{i+1} \equiv 1,2 \mod 3, \\ 1 + 3\chi(\overline{\lambda_{i+1}}) \text{ s } \lambda_{i+1} \equiv 0 \mod 3, \end{cases}$$

où $\chi(\overline{\lambda_{i+1}}) = 1$ si λ_{i+1} est surligné et 0 sinon. Alors pour tous $k, n \geq 0$, $A(k,n) = B(k,n)$.

Le cas $k = 0$ correspond au théorème de Schur.

Preuve utilisant des équations aux q-différences (D. 2013)

Soit $b_i(k,m,n)$ le nombre de surpartitions $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m$ comptées par $B(k,n)$ avec m parts, telles que $\lambda_m \geq i$.

$$f_i(x) = f_i(d,x,q) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_i(k,m,n) d^k x^m q^n.$$

On veut montrer que

$$f_1(1) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(1+q^{3j+1})(1+q^{3j+2})}{(1-dq^{3j+1})(1-dq^{3j+2})}.$$

Preuve utilisant des équations aux q-différences (D. 2013)

Soit $b_i(k,m,n)$ le nombre de surpartitions $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m$ comptées par $B(k,n)$ avec m parts, telles que $\lambda_m \geq i$.

$$f_i(x) = f_i(d,x,q) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_i(k,m,n) d^k x^m q^n.$$

On veut montrer que

$$f_1(1) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(1+q^{3j+1})(1+q^{3j+2})}{(1-dq^{3j+1})(1-dq^{3j+2})}.$$

Par un raisonnement combinatoire, on montre que f_1 vérifie $f_1(0) = 1$ et l'équation aux q-différences suivante

$$\begin{aligned}(1-dxq)(1-dxq^2)f_1(x) =&(1 + xq + xq^2 + dxq^3 - dx^2q^3 - dx^2q^6)f_1(xq^3)\\ &+ xq^3(1-xq^3)f_1(xq^6).\end{aligned}$$

Résolution de l'équation aux q-différences

Idée : faire baisser le degré de l'équation aux q-différences

$$\begin{aligned}(1-dxq)(1-dxq^2)f_1(x) =&(1+xq+xq^2+dxq^3-dx^2q^3-dx^2q^6)f_1(xq^3)\\ &+xq^3(1-xq^3)f_1(xq^6).\end{aligned}$$

Résolution de l'équation aux q-différences

Idée : faire baisser le degré de l'équation aux q-différences

$$\begin{aligned}(1-dxq)(1-dxq^2)f_1(x) =&(1+xq+xq^2+dxq^3-dx^2q^3-dx^2q^6)f_1(xq^3)\\ &+xq^3(1-xq^3)f_1(xq^6).\end{aligned}$$

On pose

$$F(x) := f_1(x)\prod_{k=0}^{\infty}\frac{(1-dxq^{3k+1})}{(1-xq^{3k})}.$$

Par définition,

$$\begin{aligned}(1-x)(1-dxq^2)F(x) = &(1+xq+xq^2+dxq^3-dx^2q^3-dx^2q^6)F(xq^3)\\ &+xq^3(1-dxq^4)F(xq^6).\end{aligned}$$

et $F(0)=1$.

Résolution de l'équation aux q-différences

Définissons maintenant la suite $(A_n(q))_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$F(x) =: \sum_{n\geq 0} A_n(q)x^n.$$

On a alors $A_0(q) = 1$ et

$$\begin{aligned}(1-q^{3n})A_n = &(1+dq^2+q^{3n-1})(1+q^{3n-2})A_{n-1} \\ &- dq^2(1+q^{3n-2})(1+q^{3n-5})A_{n-2}.\end{aligned}$$

Résolution de l'équation aux q-différences

Définissons maintenant la suite $(A_n(q))_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$F(x) =: \sum_{n\geq 0} A_n(q)x^n.$$

On a alors $A_0(q) = 1$ et

$$\begin{aligned}(1-q^{3n})A_n = &(1+dq^2+q^{3n-1})(1+q^{3n-2})A_{n-1}\\ &-dq^2(1+q^{3n-2})(1+q^{3n-5})A_{n-2}.\end{aligned}$$

On définit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$A_n =: a_n \prod_{k=0}^{n-1}(1+q^{3k+1}).$$

Alors $a_0 = 1$ et

$$(1-q^{3n})a_n = (1+dq^2+q^{3n-1})a_{n-1} - dq^2 a_{n-2}.$$

Résolution de l'équation aux q-différences

Enfin définissons

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Alors $f(0) = 1$ et

$$(1-x)(1-dxq^2)f(x) = (1+xq^2)f(xq^3).$$

f vérifie une équation aux q-différences d'ordre 1.

Résolution de l'équation aux q-différences

Enfin définissons

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Alors $f(0) = 1$ et

$$(1-x)(1-dxq^2)f(x) = (1+xq^2)f(xq^3).$$

f vérifie une équation aux q-différences d'ordre 1.
En itérant, on obtient

$$f(x) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(1+xq^{3k+2})}{(1-xq^{3k})(1-dxq^{3k+2})}.$$

Résolution de l'équation aux q-différences

On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n x^n}{\prod_{k=0}^{n-1}(1+q^{3k+1})} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(1+xq^{3k+2})}{(1-xq^{3k})(1-dxq^{3k+2})}.$$

D'après le lemme d'Abel,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n x^n}{\prod_{k=0}^{n-1}(1+q^{3k+1})} &= \frac{\lim_{n\to\infty} A_n}{\prod_{k=0}^{\infty}(1+q^{3k+1})} \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(1+q^{3k+2})}{(1-q^{3k+3})(1-dq^{3k+2})}.\end{aligned}$$

Résolution de l'équation aux q-différences

Donc

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(1+q^{3k+2})(1+q^{3k+1})}{(1-q^{3k+3})(1-dq^{3k+2})}.$$

Ensuite

$$f_1(x) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(1-xq^{3k})}{(1-dxq^{3k+1})} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = (1-x) \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(1-xq^{3k+3})}{(1-dxq^{3k+1})} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n.$$

On applique une deuxième fois le lemme d'Abel :

$$\begin{aligned} f_1(1) &= \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(1-xq^{3k+3})}{(1-dxq^{3k+1})} \lim_{n\to\infty} A_n \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(1+q^{3k+1})(1+q^{3k+2})}{(1-dq^{3k+1})(1-dq^{3k+2})}. \quad \square \end{aligned}$$

Plan

Généralisations du théorème de Schur

Notation :

$$(a;q)_\infty = \prod_{k\geq 0}(1-aq^k).$$

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\text{Schur}\\ (-q;q^3)_\infty(-q^2;q^3)_\infty\end{array} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \begin{array}{c}\text{Andrews}\\ (-q;q^N)_\infty\cdots(-q^{2^{r-1}};q^N)_\infty\end{array} \arrow[d] \\
\begin{array}{c}\text{Lovejoy}\\ \dfrac{(-q;q^3)_\infty(-q^2;q^3)_\infty}{(dq;q^3)_\infty(dq^2;q^3)_\infty}\end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c}\text{D.}\\ \dfrac{(-q;q^N)_\infty\cdots(-q^{2^{r-1}};q^N)_\infty}{(dq;q^N)_\infty\cdots(dq^{2^{r-1}};q^N)_\infty}\end{array}
\end{tikzcd}$$

Notations

- Dans la suite, r est un entier positif et $N \geq 2^r - 1$.
- $\beta_N(m) :=$ le reste de la division euclidienne de m par N.
- Pour $\alpha \in \{1, 2, \ldots, 2^r - 1\}$,
  $w(\alpha) :=$ le nombre de puissances de 2 qui apparaissent dans le développement binaire de α,
  $v(\alpha) :=$ la plus petite puissance de 2 qui apparaît dans ce développement.

Le théorème d'Andrews

Théorème (Andrews 1969)

Soit $D(r, N; n)$ le nombre de partitions de n en parts distinctes congrues à $2^0, 2^1, \ldots, 2^{r-1}$ modulo N.
Soit $E(r, N; n)$ le nombre de partitions $\lambda_1 + \cdots + \lambda_s$ de n en parts congrues à $1, 2, \ldots, 2^r - 1$ modulo N telles que

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq Nw(\beta_N(\lambda_{i+1})) + v(\beta_N(\lambda_{i+1})) - \beta_N(\lambda_{i+1}).$$

Alors pour tout $n \geq 0$, $D(r, N; n) = E(r, N; n)$.

Le théorème de Schur correspond au cas $r = 2$, $N = 3$.

Le cas $r = 3, N = 7$

Théorème

Soit $A(n)$ le nombre de partitions de n en parts distinctes congrues à 1, 2 ou 4 modulo 7. Soit $B(n)$ le nombre de partitions $\lambda_1 + \cdots + \lambda_s$ de n telles que

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq \begin{cases} 7 \text{ if } \lambda_{i+1} \equiv 1, 2, 4 \mod 7, \\ 12 \text{ if } \lambda_{i+1} \equiv 3 \mod 7, \\ 10 \text{ if } \lambda_{i+1} \equiv 5, 6 \mod 7, \\ 15 \text{ if } \lambda_{i+1} \equiv 0 \mod 7. \end{cases}$$

Alors pour tout n, $A(n) = B(n)$.

Généralisation du théorème d'Andrews aux surpartitions

Théorème (D. 2015)

Soit $A(r, N; k, n)$ le nombre de surpartitions de n en parts congrues à $2^0, 2^1, \ldots, 2^{r-1}$ modulo N, avec k part non surlignées.
Soit $B(r, N; k, n)$ le nombre de surpartitions $\lambda_1 + \cdots + \lambda_s$ de n en parts congrues à $1, 2, \ldots, 2^r - 1$ modulo N, avec k parts non surlignées, telles que

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq N \left(w\left(\beta_N(\lambda_{i+1})\right) - 1 + \chi(\overline{\lambda_{i+1}}) \right) + v(\beta_N(\lambda_{i+1})) - \beta_N(\lambda_{i+1}).$$

Alors pour tous $k, n \geq 0$, $A(r, N; k, n) = B(r, N; k, n)$.

Le cas $k = 0$ correspond au théorème d'Andrews.
Le cas $N = 3$, $r = 2$ correspond au théorème de Schur pour les surpartitions.

Preuve du théorème d'Andrews pour les surpartitions

- Soit $b_i^r(k,m,n)$ le nombre de surpartitions $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m$ comptées par $B(r,N;k,n)$, ayant m parts, telles que $\lambda_m \geq i$, et

$$f_i^r(x) = f_i^r(x,q,d) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_i^r(k,m,n) x^m d^k q^n.$$

- On veut montrer que

$$f_1^r(1) = \prod_{k=0}^{r-1} \frac{(-q^{2^k};q^N)_\infty}{(dq^{2^k};q^N)_\infty},$$

qui est la série génératrice des surpartitions comptées par $A(r,N;k,n)$.

Preuve du théorème d'Andrews pour les surpartitions

L'équation aux q-différences $(\mathrm{eq}_{r,N})$ vérifiée par $f_1^r(x)$ est

$$\prod_{j=0}^{r-1}\left(1-dxq^{2^j}\right) f_1^r(x) = f_1^r(xq^N)$$

$$+\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{m=0}^{r-j} d^m \sum_{\substack{\alpha<2^{r-1}\\ w(\alpha)=j+m}} xq^{\alpha}\left((-x)^{m-1}\begin{bmatrix} j+m-1 \\ m-1\end{bmatrix}_{q^N}\right.\right.$$

$$\left.\left.+(-x)^m\begin{bmatrix} j+m \\ m\end{bmatrix}_{q^N}\right)\right)\prod_{h=1}^{j-1}\left(1-xq^{hN}\right) f_1^r\left(xq^{jN}\right).$$

Idée : faire des transformations pour passer de $(eq_{r,N})$ à $(eq_{r-1,N})$ et prouver le théorème par récurrence.

Initialisation

Théorème (cas r=1)

Soit $A(1, N; k, n)$ le nombre de surpartitions de n en parts congrues à 1 modulo N, ayant k parts non surlignées. Soit $B(1, n; k, n)$ le nombre de surpartitions $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m$ de n en parts congrues à 1 modulo N, ayant k parts non surlignées, telles que

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 0 + N\chi(\overline{\lambda_{i+1}}).$$

Alors $A(1, N; k, n) = B(1, N; k, n)$.

Équation aux q-différences correspondante :

$$(1 - dxq) f_1^1(x) = (1 + xq) f_1^1(xq^N). \qquad (\mathrm{eq}_{1,N})$$

Donc en itérant

$$f_1^1(1) = \prod_{k \geq 0} \frac{(1 + q^{Nk+1})}{(1 - dq^{Nk+1})}.$$

Hérédité

On suppose que si f_1^{r-1} vérifie $(\mathrm{eq}_{r-1,N})$ et $f_1^{r-1}(0) = 1$, alors

$$f_1^{r-1}(1) = \prod_{k=0}^{r-2} \frac{(-q^{2^k}; q^N)_\infty}{(dq^{2^k}; q^N)_\infty},$$

et on montre que si f_1^r vérifie $(\mathrm{eq}_{r,N})$ et $f_1^r(0) = 1$, alors

$$f_1^r(1) = \prod_{k=0}^{r-1} \frac{(-q^{2^k}; q^N)_\infty}{(dq^{2^k}; q^N)_\infty}.$$

Soit

$$F(x) := f_1^r(x) \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 - dxq^{Nn+2^{r-1}}}{1 - xq^{Nn}}.$$

Alors F satisfait $F(0) = 1$ et

$$\begin{aligned}(1-x)\prod_{j=0}^{r-2}\left(1-dxq^{2^j}\right)F(x) &= F(xq^N)\\ &+\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{m=0}^{r-j} d^m \sum_{\substack{\alpha<2^{r-1}\\ w(\alpha)=j+m}} xq^{\alpha}\left((-x)^{m-1}\begin{bmatrix} j+m-1\\ m-1\end{bmatrix}_{q^N}\right.\right.\\ &\left.\left.+(-x)^m\begin{bmatrix} j+m\\ m\end{bmatrix}_{q^N}\right)\right)\prod_{h=1}^{j-1}\left(1-dxq^{hN+2^{r-1}}\right)F\left(xq^{jN}\right).\end{aligned} \qquad (\mathrm{eq}'_{N,r})$$

Maintenant soit (A_n) telle que $F(x) = \sum_{n\geq 0} A_n x^n$. Alors $A_0 = 1$ et

$$\left(1-q^{nN}\right)A_n = \sum_{m=1}^{r}\left(d^{m-1}\sum_{\substack{\alpha<2^{r-1}\\ w(\alpha)=m-1}} q^{\alpha} + d^{m}\sum_{\substack{\alpha<2^{r-1}\\ w(\alpha)=m}} q^{\alpha} + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{\min(j-1,m-1)} c_{k,j} b_{m-k,j} q^{jN(n-m)}\right)(-1)^{m+1}A_{n-m}, \tag{$\mathrm{rec}_{N,r}$}$$

avec $c_{k,j} := q^{N\frac{k(k+1)}{2}+k2^{r-1}}\begin{bmatrix} j-1 \\ k \end{bmatrix}_{q^N} d^k$, et

$$b_{m,j} := \left(d^{m-1}\sum_{\substack{\alpha<2^{r}\\ w(\alpha)=j+m-1}} q^{\alpha} + d^{m}\sum_{\substack{\alpha<2^{r}\\ w(\alpha)=j+m}} q^{\alpha}\right)\begin{bmatrix} j+m-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_{q^N}.$$

Soit (a_n) telle que

$$A_n = a_n \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + q^{Nk+2^{r-1}}\right).$$

Alors $a_0 = 1$ et

$$\begin{aligned}\left(1 - q^{nN}\right) a_n = &\sum_{m=1}^{r} \left(d^{m-1} \sum_{\substack{\alpha<2^{r-1}\\ w(\alpha)=m-1}} q^{\alpha} + d^{m} \sum_{\substack{\alpha<2^{r-1}\\ w(\alpha)=m}} q^{\alpha} \right) (-1)^{m+1} a_{n-m} \\ &+ \sum_{m=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{r-1} \left(d^{m-1} \sum_{\substack{\alpha<2^{r-1}\\ w(\alpha)=j+m-1}} q^{\alpha} + d^{m} \sum_{\substack{\alpha<2^{r-1}\\ w(\alpha)=j+m}} q^{\alpha} \right) \\ &\times \begin{bmatrix} j+m-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_{q^N} q^{jN(n-m)} (-1)^{m+1} a_{n-m}.\end{aligned}$$

Soit

$$G(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Alors $G(0) = 1$ et

$$\left(1+\sum_{j=1}^{r}\left(d^{j-1}\sum_{\substack{\alpha<2^{r-1}\\ w(\alpha)=j-1}} q^{\alpha} + d^{j}\sum_{\substack{\alpha<2^{r-1}\\ w(\alpha)=j}} q^{\alpha}\right)(-x)^j\right) G(x) = G\left(xq^N\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{r}\sum_{m=1}^{r-j}\left(d^{m-1}\sum_{\substack{\alpha<2^{r-1}\\ w(\alpha)=j+m-1}} q^{\alpha} + d^{m}\sum_{\substack{\alpha<2^{r-1}\\ w(\alpha)=j+m}} q^{\alpha}\right)$$

$$\times \begin{bmatrix} j+m-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_{q^N} (-1)^{m+1} x^m G\left(xq^{jN}\right).$$

Enfin soit

$$g(x) := G(x) \prod_{k \geq 0} (1 - xq^{3k}).$$

Alors $g(0) = 1$ et g satisfait l'équation $(\mathrm{eq}_{r-1,N})$.
Donc d'après l'hypothèse de récurrence,

$$g(1) = f_1^{r-1}(1) = \prod_{k=0}^{r-2} \frac{(-q^{2^k}; q^N)_\infty}{(dq^{2^k}; q^N)_\infty}.$$

Remontons maintenant à $f_1^r(1)$ en utilisant le lemme d'Abel.

On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n x^n}{\prod_{k=0}^{n-1}(1+q^{Nk+2^{r-1}})} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = G(x).$$

D'après le lemme d'Abel,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n x^n}{\prod_{k=0}^{n-1}(1+q^{Nk+2^{r-1}})} &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} A_n}{\prod_{k=0}^{\infty}(1+q^{Nk+2^{r-1}})} \\
&= \lim_{x\to 1^-}(1-x)G(x) \\
&= \prod_{k\geq 1} \frac{1}{1-q^{Nk}} g(1) \\
&= \frac{1}{(q^N;q^N)_\infty} \prod_{k=0}^{r-2} \frac{(-q^{2^k};q^N)_\infty}{(dq^{2^k};q^N)_\infty}.
\end{aligned}$$

Résolution de l'équation aux q-différences

Donc

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{(-q^{2^{r-1}};q^N)_\infty}{(q^N;q^N)_\infty} \prod_{k=0}^{r-2} \frac{(-q^{2^k};q^N)_\infty}{(dq^{2^k};q^N)_\infty}.$$

Ensuite

$$f_1^r(x) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(1-xq^{Nk})}{(1-dxq^{Nk+2^{r-1}})} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n.$$

On applique une deuxième fois le lemme d'Abel :

$$\begin{aligned} f_1^r(1) &= \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q^{Nk+N})}{(1-dq^{Nk+2^{r-1}})} \lim_{n\to\infty} A_n \\ &= \frac{(-q^{2^{r-1}};q^N)_\infty}{(dq^{2^{r-1}};q^N)_\infty} \prod_{k=0}^{r-2} \frac{(-q^{2^k};q^N)_\infty}{(dq^{2^k};q^N)_\infty}. \qquad \square \end{aligned}$$

Conclusion

- Autres applications de la méthode : deuxième famille infinie de théorèmes d'Andrews (D. 2015), généralisation qui regroupe les deux familles (D. 2016)

Conclusion

- Autres applications de la méthode : deuxième famille infinie de théorèmes d'Andrews (D. 2015), généralisation qui regroupe les deux familles (D. 2016)
- Question au public : Automatisation possible ?

Conclusion

- Autres applications de la méthode : deuxième famille infinie de théorèmes d'Andrews (D. 2015), généralisation qui regroupe les deux familles (D. 2016)
- Question au public : Automatisation possible ?

Merci pour votre attention !