Diagonales de fraction rationnelle :

une promenade en géométrie algébrique

Gilles Christol

Université Pierre et Marie Curie

SpecFun 27 avril 2015

Plan de l'exposé

1. Diagonales de fraction rationnelle
   - propriétés
   - conjectures
2. Représentations intégrales
   - conjecture géométrique
   - cohomologie de de Rham
   - théorème de comparaison
3. Preuve de DFR
   - filtrations
   - pour les fonctions hypergéométriques
4. Preuve de DFR faible
   - cohomologie p-adique en caractéristique p
   - structure de Frobenius et p-automaticité
5. Données expérimentales
   - équations différentielles autoadjointes
   - la liste de Almkvist & co.

Diagonales de fraction rationnelle : définition

Notation : $\mathbb{Q}((x_0,\ldots,x_n)) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{Q}[[x_0,\ldots,x_n]][\frac{1}{x_0\cdots x_n}]$, Notation : $\mathbb{Q}((x_0,\ldots,x_n)) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{Q}[[x_0,\ldots,x_n]][\frac{1}{x_0\cdots x_n}]$,

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{Q}(x_0,\ldots,x_n) \bigcap \mathbb{Q}((x_0,\ldots,x_n))$

[C'est-à-dire dont le dénominateur Q est *inversible* dans $\mathbb{Q}((x_0,\ldots,x_n))$] .

Diagonales de fraction rationnelle : définition

Notation : $\mathbb{Q}((x_0, \ldots, x_n)) \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{Q}[[x_0, \ldots, x_n]][\frac{1}{x_0 \cdots x_n}]$,

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{Q}(x_0, \ldots, x_n) \bigcap \mathbb{Q}((x_0, \ldots, x_n))$

[C'est-à-dire dont le dénominateur Q est *inversible* dans $\mathbb{Q}((x_0, \ldots, x_n))$] .

Elle s'écrit $f(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{r_i \leq s_i} a_{s_0 \cdots s_n} \, x_0^{s_0} \cdots x_n^{s_n}$,

et la série $\mathrm{Diag}\left(\dfrac{P}{Q}\right) \overset{\text{déf}}{=} \sum a_{s \cdots s} \, x^s \quad \in \mathbb{Q}((x)) = \mathbb{Q}[[x]]\,[\dfrac{1}{x}]$

s'appelle *diagonale de (la fraction rationnelle)* $\frac{P}{Q}$.

Diagonales de fraction rationnelle : définition

Notation : $\mathbb{Q}((x_0,\ldots,x_n)) \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{Q}[[x_0,\ldots,x_n]][\frac{1}{x_0\cdots x_n}]$,

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{Q}(x_0,\ldots,x_n)\bigcap\mathbb{Q}((x_0,\ldots,x_n))$

[C'est-à-dire dont le dénominateur Q est *inversible* dans $\mathbb{Q}((x_0,\ldots,x_n))$] .

Elle s'écrit $f(x_0,\ldots,x_n) = \sum_{r_i\le s_i} a_{s_0\cdots s_n}\; x_0^{s_0}\cdots x_n^{s_n}$,

et la série $\mathrm{Diag}\left(\dfrac{P}{Q}\right) \overset{\text{déf}}{=} \sum a_{s\cdots s}\; x^s \quad \in \mathbb{Q}((x)) = \mathbb{Q}[[x]]\,[\dfrac{1}{x}]$

s'appelle *diagonale de (la fraction rationnelle)* $\frac{P}{Q}$.

Remarque importante

Les *diagonales des séries* de $\mathbb{Q}((x_0,\ldots,x_n))$ qui sont *algébriques* sur $\mathbb{Q}(x_0,\ldots,x_n)$ ne donnent pas de nouvelles fonctions.

Diagonales de fraction rationnelle : propriétés

Toute diagonale de fraction rationnelle f est :

Diagonales de fraction rationnelle : propriétés

Toute diagonale de fraction rationnelle f est :

1) *globalement bornée* : $\exists\, c\,,\, d \in \mathbb{N}^*,\quad d\, f(c\, x) \in \mathbb{Z}((x))$,

Toute diagonale de fraction rationnelle f est :

1) *globalement bornée* : $\exists\, c\,,\, d \in \mathbb{N}^*,\quad d\, f(c\, x) \in \mathbb{Z}((x))$,

Toute diagonale de fraction rationnelle f est :

1) *globalement bornée* : $\exists\, c\,,\, d \in \mathbb{N}^*,\quad d\, f(c\, x) \in \mathbb{Z}((x))$,
et de *rayon de convergence* (dans $\mathbb{C}$) *non nul* ,

Toute diagonale de fraction rationnelle f est :

1) *globalement bornée* : $\exists\ c\,,\ d \in \mathbb{N}^*,\quad d\, f(c\, x) \in \mathbb{Z}((x))$,
et de *rayon de convergence* (dans $\mathbb{C}$) *non nul* ,

2) *D-finie* : $\exists\ L \in \mathbb{Z}[x][\frac{d}{dx}]$, $L \neq 0$, tel que $L(f) = 0$,

Diagonales de fraction rationnelle : propriétés

Toute diagonale de fraction rationnelle f est :

1) *globalement bornée* : $\exists\ c\,,\, d \in \mathbb{N}^*,\ \ d\, f(c\,x) \in \mathbb{Z}((x))$,
et de *rayon de convergence* (dans $\mathbb{C}$) *non nul* ,

2) *D-finie* : $\exists\ L \in \mathbb{Z}[x][\frac{d}{dx}]$, $L \neq 0$, tel que $L(f) = 0$,

3) *globalement automatique* : $\mathrm{pp}\forall p\ \forall h$, f est p-automatique mod p^h .

Diagonales de fraction rationnelle : propriétés

Toute diagonale de fraction rationnelle f est :

1) *globalement bornée* : $\exists\ c\,,\, d \in \mathbb{N}^*, \quad d\, f(c\, x) \in \mathbb{Z}((x))$,
   et de *rayon de convergence* (dans $\mathbb{C}$) *non nul* ,
2) *D-finie* : $\exists\ L \in \mathbb{Z}[x][\frac{d}{dx}]$, $L \neq 0$, tel que $L(f) = 0$,
3) *globalement automatique* : $\mathrm{pp}\forall p\ \forall h$, f est p-automatique mod p^h .

Théorème de Lairez (2014)

$\sum u_n\, x^n$ est une *diagonale* de f.r. ssi la suite u_n est une *somme binomiale*

(càd obtenue à partir des coefficients binomiaux et des suites géométriques par opérations algébriques, sommations finies et changements d'indice affines).

Diagonales de fraction rationnelle : propriétés

Toute diagonale de fraction rationnelle f est :

1) *globalement bornée* : $\exists\ c\,,\, d \in \mathbb{N}^*,\quad d\, f(c\, x) \in \mathbb{Z}((x))$,
et de *rayon de convergence* (dans $\mathbb{C}$) *non nul* ,

2) *D-finie* : $\exists\ L \in \mathbb{Z}[x][\frac{d}{dx}]$, $L \neq 0$, tel que $L(f) = 0$,

3) *globalement automatique* : $\mathrm{pp}\forall p\ \forall h$, f est p-automatique mod p^h .

Théorème de Lairez (2014)

$\sum u_n\, x^n$ est une *diagonale* de f.r. ssi la suite u_n est une *somme binomiale*

(càd obtenue à partir des coefficients binomiaux et des suites géométriques par opérations algébriques, sommations finies et changements d'indice affines).

Définition

Une série de $\mathbb{Q}((x))$ qui vérifie les propriétés 1) et 2) sera appelée *pseudo-diagonale* .

Diagonales de fraction rationnelle : conjectures

Conjecture DFR

Toute pseudo-diagonale est la diagonale d'une fraction rationnelle.

Diagonales de fraction rationnelle : conjectures

Conjecture DFR

Toute pseudo-diagonale est la diagonale d'une fraction rationnelle.

Conjecture DFR faible

Toute pseudo-diagonale est globalement automatique (propriété 3).

Diagonales de fraction rationnelle : conjectures

Conjecture DFR

Toute pseudo-diagonale est la diagonale d'une fraction rationnelle.

Conjecture DFR faible

Toute pseudo-diagonale est globalement automatique (propriété 3).

Liens avec la conjecture de Grothendieck (GR)

Si $L \in \mathbb{Z}[x][\frac{d}{dx}]$ a, $\mathrm{pp}\forall p$, un système complet de solutions dans $\mathbb{F}_p[x]$, alors toutes ses solutions sont des fonctions algébriques.

Diagonales de fraction rationnelle : conjectures

Conjecture DFR

Toute pseudo-diagonale est la diagonale d'une fraction rationnelle.

Conjecture DFR faible

Toute pseudo-diagonale est globalement automatique (propriété 3).

Liens avec la conjecture de Grothendieck (GR)

Si $L \in \mathbb{Z}[x][\frac{d}{dx}]$ a, $\mathrm{pp}\forall p$, un système complet de solutions dans $\mathbb{F}_p[x]$, alors toutes ses solutions sont des fonctions algébriques.

conj. GR

Pour presque tout p

conj. DFR

Pour presque tout p

Conjecture DFR

Toute pseudo-diagonale est la diagonale d'une fraction rationnelle.

Conjecture DFR faible

Toute pseudo-diagonale est globalement automatique (propriété 3).

Liens avec la conjecture de Grothendieck (GR)

Si $L \in \mathbb{Z}[x][\frac{d}{dx}]$ a, $\mathrm{pp}\forall p$, un système complet de solutions dans $\mathbb{F}_p[x]$, alors toutes ses solutions sont des fonctions algébriques.

conj. GR		conj. DFR
Pour presque tout p		Pour presque tout p
toutes les solutions sont	$\overset{(1)}{\Longrightarrow}$	*une* solution est

Diagonales de fraction rationnelle : conjectures

Conjecture DFR

Toute pseudo-diagonale est la diagonale d'une fraction rationnelle.

Conjecture DFR faible

Toute pseudo-diagonale est globalement automatique (propriété 3).

Liens avec la conjecture de Grothendieck (GR)

Si $L \in \mathbb{Z}[x][\frac{d}{dx}]$ a, $\mathrm{pp}\forall p$, un système complet de solutions dans $\mathbb{F}_p[x]$, alors toutes ses solutions sont des fonctions algébriques.

conj. GR		conj. DFR
Pour presque tout p		Pour presque tout p
toutes les solutions sont	$\overset{(1)}{\Longrightarrow}$	*une* solution est
(modulo p) dans $\mathbb{F}_p[x]$.	$\overset{(2)}{\Longleftarrow}$	dans $\mathbb{Z}_p[[x]]$.

Conjecture DFR

Toute pseudo-diagonale est la diagonale d'une fraction rationnelle.

Conjecture DFR faible

Toute pseudo-diagonale est globalement automatique (propriété 3).

Liens avec la conjecture de Grothendieck (GR)

Si $L \in \mathbb{Z}[x][\frac{d}{dx}]$ a, $\mathrm{pp}\forall p$, un système complet de solutions dans $\mathbb{F}_p[x]$, alors toutes ses solutions sont des fonctions algébriques.

conj. GR		conj. DFR
Pour presque tout p		Pour presque tout p
toutes les solutions sont	$\overset{(1)}{\Longrightarrow}$	*une* solution est
(modulo p) dans $\mathbb{F}_p[x]$.	$\overset{(2)}{\Longleftarrow}$	dans $\mathbb{Z}_p[[x]]$.

En fait l'implication (2) est presque une équivalence .

Propriété caractéristique des G-fonctions

$f \in \mathbb{Q}[[x]]$ est une *G-fonction* ssi elle est *D-finie*, ses rayons de convergence (en 0) $\mathtt{Ray}_{p,0}^{\leq 1}(f)$ vérifiant la condition $\displaystyle\prod_{p \text{ place de } \mathbb{Q}} \mathtt{Ray}_{p,0}^{\leq 1}(f) > 0$.

Propriété caractéristique des G-fonctions

$f \in \mathbb{Q}[[x]]$ est une *G-fonction* ssi elle est *D-finie*, ses rayons de convergence (en 0) $\mathtt{Ray}_{p,0}^{\leq 1}(f)$ vérifiant la condition $\displaystyle\prod_{p \text{ place de } \mathbb{Q}} \mathtt{Ray}_{p,0}^{\leq 1}(f) > 0$.

Une pseudo-diagonale f est une G-fonction : 2) $\Rightarrow \mathrm{pp}\forall p$, $\mathtt{Ray}_{p,0}^{\leq 1}(f) = 1$.

Propriété caractéristique des G-fonctions

$f \in \mathbb{Q}[[x]]$ est une *G-fonction* ssi elle est *D-finie*, ses rayons de convergence (en 0) $\mathtt{Ray}_{p,0}^{\leq 1}(f)$ vérifiant la condition $\displaystyle\prod_{p \text{ place de } \mathbb{Q}} \mathtt{Ray}_{p,0}^{\leq 1}(f) > 0$.

Une pseudo-diagonale f est une G-fonction : 2) $\Rightarrow \mathrm{pp}\forall p$, $\mathtt{Ray}_{p,0}^{\leq 1}(f) = 1$.

Condition de Galočkin

Pour $L \in \mathbb{Z}[x][\frac{d}{dx}]$ c'est la condition $\displaystyle\prod_{p \text{ place de } \mathbb{Q}} \mathtt{Ray}_{p,\mathrm{Gauss}}(L) > 0$

où $\mathtt{Ray}_{p,\mathrm{Gauss}}(L)$ est le rayon de convergence des solutions de L au voisinage du point générique t_p correspondant à la norme de Gauss p-adique.

Propriété caractéristique des G-fonctions

$f \in \mathbb{Q}[[x]]$ est une *G-fonction* ssi elle est *D-finie*, ses rayons de convergence (en 0) $\mathtt{Ray}_{p,0}^{\leq 1}(f)$ vérifiant la condition $\prod_{p \text{ place de } \mathbb{Q}} \mathtt{Ray}_{p,0}^{\leq 1}(f) > 0$.

Une pseudo-diagonale f est une G-fonction : 2) $\Rightarrow \mathrm{pp} \forall p$, $\mathtt{Ray}_{p,0}^{\leq 1}(f) = 1$.

Condition de Galočkin

Pour $L \in \mathbb{Z}[x][\frac{d}{dx}]$ c'est la condition $\prod_{p \text{ place de } \mathbb{Q}} \mathtt{Ray}_{p,\mathrm{Gauss}}(L) > 0$

où $\mathtt{Ray}_{p,\mathrm{Gauss}}(L)$ est le rayon de convergence des solutions de L au voisinage du point générique t_p correspondant à la norme de Gauss p-adique.

Théorème des Chudnovsky

L'équation différentielle *minimale* d'une *G-fonction* satisfait la condition de *Galočkin*. En particulier, elle n'a que des points singuliers réguliers avec exposants rationnels.

Conjecture informelle

Les G-fonctions (donc les pseudo-diagonales) "*viennent de la géométrie*" .

Représentations intégrales : conjecture géométrique

Conjecture informelle

Les G-fonctions (donc les pseudo-diagonales) "*viennent de la géométrie*" .

Traduction possible

Toute pseudo-diagonale a une *représentation intégrale* :

$$f(x) = \int_\gamma F\big(x, x_1, \ldots, x_n\big)\; dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_\gamma \omega(x)$$

avec :

- F *fonction algébrique* de $x, x_1, \ldots, x_n$
- γ *n-cycle* sur la variété V de F (et "indépendant" de x).

Représentations intégrales : conjecture géométrique

Conjecture informelle

Les G-fonctions (donc les pseudo-diagonales) “*viennent de la géométrie*” .

Traduction possible

Toute pseudo-diagonale a une *représentation intégrale* :

$$f(x) = \int_\gamma F\big(x, x_1, \dots, x_n\big)\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_\gamma \omega(x)$$

avec :

- F *fonction algébrique* de $x, x_1, \dots, x_n$
- γ *n-cycle* sur la variété V de F (et “indépendant” de x).
- ω *n-forme différentielle* sur une variété quasi-projective $V \to S$ (définie au-dessus d'un ouvert S de $\mathbb{P}_1$), de dimension relative n .
- γ *n-cycle* sur V (sur V_x et “indépendant” de x).

Représentations intégrales : cas des diagonales

Représentations intégrales : cas des diagonales

Pour $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{Q}((x_0, \ldots, x_n))$, on a $\mathrm{Diag}\Big(F\Big)(x) = \dfrac{1}{(2i\pi)^n} \displaystyle\int_\gamma \omega(x)$ avec :

- $\gamma = \prod_{i=1}^n \gamma_i$ et $\gamma_i = \Big\{|x_i| = \varepsilon\Big\}^{\circlearrowleft}$ (cycle évanescent).
- $\omega = F\Big(\dfrac{x}{x_1 \cdots x_n}, x_1, \ldots, x_n\Big) \dfrac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \dfrac{dx_n}{x_n}$

Représentations intégrales : cas des diagonales

Pour $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{Q}((x_0, \ldots, x_n))$, on a $\mathrm{Diag}\Big(F\Big)(x) = \dfrac{1}{(2i\pi)^n} \displaystyle\int_\gamma \omega(x)$ avec :

- $\gamma = \prod_{i=1}^n \gamma_i$ et $\gamma_i = \big\{|x_i| = \varepsilon\big\}^{\circlearrowleft}$ (cycle évanescent).
- $\omega = F\Big(\dfrac{x}{x_1 \cdots x_n}, x_1, \ldots, x_n\Big) \dfrac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \dfrac{dx_n}{x_n}$
- $\omega \in \Omega^n(V/S)$

$$\left\{\begin{array}{ccl} V & : & \big\{(x_0, \ldots, x_n)\,;\ x_0 \cdots x_n\, Q(x_0, \ldots, x_n) \neq 0\big\} \subset \mathbb{A}_S^{n+1} \\ V \to S & : & (x_0, \ldots, x_n) \mapsto x = x_0 \cdots x_n \\ S & \supset & C_\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \{0 < |x| \leq \varepsilon^{n+1}\} \end{array}\right.$$

Représentations intégrales : cas des diagonales

Pour $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{Q}((x_0, \ldots, x_n))$, on a $\mathrm{Diag}\Big(F\Big)(x) = \dfrac{1}{(2i\pi)^n} \displaystyle\int_\gamma \omega(x)$ avec :

- $\gamma = \prod_{i=1}^n \gamma_i$ et $\gamma_i = \big\{|x_i| = \varepsilon\big\}^{\circlearrowleft}$ (cycle évanescent).
- $\omega = F\Big(\dfrac{x}{x_1 \cdots x_n}, x_1, \ldots, x_n\Big) \dfrac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \dfrac{dx_n}{x_n}$
- $\omega \in \Omega^n(V/S)$

$$\begin{cases} V & : & \big\{(x_0, ..., x_n)\,;\ x_0 \cdots x_n\, Q(x_0, \ldots, x_n) \neq 0\big\} \subset \mathbb{A}_S^{n+1} \\ V \to S & : & (x_0, ..., x_n) \mapsto x = x_0 \cdots x_n \\ S & \supset & C_\varepsilon \overset{\text{déf}}{=} \{0 < |x| \leq \varepsilon^{n+1}\} \end{cases}$$

Pour $x \in C_\varepsilon$ et ε assez petit, $\gamma \subset V$ car Q est inversible et, sur γ, on a :

$$x_i \neq 0 \quad {\scriptstyle (1 \leq i \leq n)} \qquad \text{et} \qquad 0 < |x_0| = \left|\frac{x}{x_1 \cdots x_n}\right| = |x|\varepsilon^{-n} \leq \varepsilon\ .$$

Représentations intégrales : cohomologie de de Rham

Représentations intégrales : cohomologie de de Rham

Soit V une variété algébrique complexe lisse de *dimension* n,

V_{an} la variété analytique complexe de *dimension* n correspondante,

$V_{\mathbb{R}}$ la variété différentielle "réelle" de *dimension* $2\,n$ sous-jacente.

Représentations intégrales : cohomologie de de Rham

Soit V une variété algébrique complexe lisse de *dimension* n,
V_{an} la variété analytique complexe de *dimension* n correspondante,
$V_{\mathbb{R}}$ la variété différentielle "réelle" de *dimension* $2\,n$ sous-jacente.

On a les faisceaux (de $\mathbb{C}$-e.v.) des formes différentielles ($\Omega^m = \bigwedge^m \Omega^1$) :

$$\Omega^m(V) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big\{\text{f. d. } \textit{algébriques} \text{ de degré } m \text{ sur } V\Big\},$$
$$\Omega^m(V_{an}) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big\{\text{f. d. } \textit{holomorphes} \text{ de degré } m \text{ sur } V_{an}\Big\},$$
$$\Omega^m(V_{\mathbb{R}}) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big\{\text{f. d. } C^\infty \text{ de degré } m \text{ sur } V_{\mathbb{R}}\Big\}.$$

Soit V une variété algébrique complexe lisse de *dimension n*,
V_{an} la variété analytique complexe de *dimension n* correspondante,
$V_{\mathbb{R}}$ la variété différentielle "réelle" de *dimension $2n$* sous-jacente.

On a les faisceaux (de $\mathbb{C}$-e.v.) des formes différentielles ($\Omega^m = \bigwedge^m \Omega^1$) :

$$\Omega^m(V) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{\text{f. d. } \textit{algébriques} \text{ de degré } m \text{ sur } V\right\},$$
$$\Omega^m(V_{an}) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{\text{f. d. } \textit{holomorphes} \text{ de degré } m \text{ sur } V_{an}\right\},$$
$$\Omega^m(V_{\mathbb{R}}) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{\text{f. d. } C^\infty \text{ de degré } m \text{ sur } V_{\mathbb{R}}\right\}.$$

Cohomologie de de Rham de $V_{\mathbb{R}}$

C'est la cohomologie $H^i_{\mathrm{DR}}(V_{\mathbb{R}})$ du *complexe* des sections globales :

$$0 \longrightarrow \Gamma\Omega^0(V_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{d} \Gamma\Omega^1(V_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Gamma\Omega^{2n}(V_{\mathbb{R}}) \longrightarrow 0$$

Représentations intégrales : cohomologie de de Rham

Soit V une variété algébrique complexe lisse de *dimension* n,
V_{an} la variété analytique complexe de *dimension* n correspondante,
$V_{\mathbb{R}}$ la variété différentielle “réelle” de *dimension* $2\,n$ sous-jacente.

On a les faisceaux (de $\mathbb{C}$-e.v.) des formes différentielles ($\Omega^m = \bigwedge^m \Omega^1$) :

$$\Omega^m(V) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big\{\text{f. d. } \textit{algébriques} \text{ de degré } m \text{ sur } V\Big\},$$
$$\Omega^m(V_{an}) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big\{\text{f. d. } \textit{holomorphes} \text{ de degré } m \text{ sur } V_{an}\Big\},$$
$$\Omega^m(V_{\mathbb{R}}) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big\{\text{f. d. } C^\infty \text{ de degré } m \text{ sur } V_{\mathbb{R}}\Big\}.$$

Cohomologie de de Rham de $V_{\mathbb{R}}$

C’est la cohomologie $H^i_{\mathrm{DR}}(V_{\mathbb{R}})$ du *complexe* des sections globales :

$$0 \longrightarrow \Gamma\Omega^0(V_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{d} \Gamma\Omega^1(V_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Gamma\Omega^{2n}(V_{\mathbb{R}}) \longrightarrow 0$$

D’après le lemme de Poincaré, on a : $H^i_{\mathrm{DR}}(V_{\mathbb{R}}) = H^i\big(V(\mathbb{C}), \mathbb{C}\big)$

Représentations intégrales : cohomologie de de Rham

Soit V une variété algébrique complexe lisse de *dimension n*,
V_{an} la variété analytique complexe de *dimension n* correspondante,
$V_{\mathbb{R}}$ la variété différentielle "réelle" de *dimension $2\,n$* sous-jacente.

On a les faisceaux (de $\mathbb{C}$-e.v.) des formes différentielles ($\Omega^m = \bigwedge^m \Omega^1$) :

$$\Omega^m(V) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big\{\text{f. d. } \textit{algébriques} \text{ de degré } m \text{ sur } V\Big\},$$
$$\Omega^m(V_{an}) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big\{\text{f. d. } \textit{holomorphes} \text{ de degré } m \text{ sur } V_{an}\Big\},$$
$$\Omega^m(V_{\mathbb{R}}) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big\{\text{f. d. } C^\infty \text{ de degré } m \text{ sur } V_{\mathbb{R}}\Big\}.$$

Cohomologie de de Rham de $V_{\mathbb{R}}$

C'est la cohomologie $H^i_{\mathrm{DR}}(V_{\mathbb{R}})$ du *complexe* des sections globales :

$$0 \longrightarrow \Gamma\Omega^0(V_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{d} \Gamma\Omega^1(V_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Gamma\Omega^{2n}(V_{\mathbb{R}}) \longrightarrow 0$$

D'après le lemme de Poincaré, on a : $H^i_{\mathrm{DR}}(V_{\mathbb{R}}) = H^i\big(V(\mathbb{C}), \mathbb{C}\big)$

On peut aussi utiliser l'*hypercohomologie* :

$$H^i_{\mathrm{DR}}(V_{\mathbb{R}}) = \mathbb{H}^i\big(\Omega^0(V_{\mathbb{R}}) \to \cdots \to \Omega^{2n}(V_{\mathbb{R}})\big)$$

On peut aussi utiliser l'*hypercohomologie* :

$$H^i_{\mathrm{DR}}(V_{\mathbb{R}}) = \mathbb{H}^i\big(\Omega^0(V_{\mathbb{R}}) \to \cdots \to \Omega^{2n}(V_{\mathbb{R}})\big)$$

Cohomologies de de Rham analytique et algébrique

On pose : $H^i_{\mathrm{DR}}(V_{an}) = \mathbb{H}^i\big(\Omega^0(V_{an}) \to \cdots \to \Omega^n(V_{an})\big)$,

$$H^i_{\mathrm{DR}}(V) = \mathbb{H}^i\big(\Omega^0(V) \to \cdots \to \Omega^n(V)\big) .$$

On peut aussi utiliser l'*hypercohomologie* :

$$H^i_{\mathrm{DR}}(V_{\mathbb{R}}) = \mathbb{H}^i\big(\Omega^0(V_{\mathbb{R}}) \to \cdots \to \Omega^{2n}(V_{\mathbb{R}})\big)$$

Cohomologies de de Rham analytique et algébrique

On pose : $H^i_{\mathrm{DR}}(V_{an}) = \mathbb{H}^i\big(\Omega^0(V_{an}) \to \cdots \to \Omega^n(V_{an})\big)$,

$H^i_{\mathrm{DR}}(V) = \mathbb{H}^i\big(\Omega^0(V) \to \cdots \to \Omega^n(V)\big)$.

Poincaré analytique donne : $H^i_{\mathrm{DR}}(V_{an}) = H^i\big(V(\mathbb{C}), \mathbb{C}\big) = H^i_{\mathrm{DR}}(V_{\mathbb{R}})$.

On peut aussi utiliser l'*hypercohomologie* :

$$H^i_{\mathrm{DR}}(V_{\mathbb{R}}) = \mathbb{H}^i\big(\Omega^0(V_{\mathbb{R}}) \to \cdots \to \Omega^{2n}(V_{\mathbb{R}})\big)$$

Cohomologies de de Rham analytique et algébrique

On pose : $H^i_{\mathrm{DR}}(V_{an}) = \mathbb{H}^i\big(\Omega^0(V_{an}) \to \cdots \to \Omega^n(V_{an})\big)$,

$H^i_{\mathrm{DR}}(V) = \mathbb{H}^i\big(\Omega^0(V) \to \cdots \to \Omega^n(V)\big)$.

Poincaré analytique donne : $H^i_{\mathrm{DR}}(V_{an}) = H^i\big(V(\mathbb{C}), \mathbb{C}\big) = H^i_{\mathrm{DR}}(V_{\mathbb{R}})$.

Théorème de comparaison de Grothendieck

L'application naturelle $H^i_{\mathrm{DR}}(V) \to H^i_{\mathrm{DR}}(V_{an})$ est un isomorphisme.

Représentations intégrales : théorème de comparaison

On peut aussi utiliser l'*hypercohomologie* :

$$H^i_{\mathrm{DR}}(V_{\mathbb{R}}) = \mathbb{H}^i\big(\Omega^0(V_{\mathbb{R}}) \to \cdots \to \Omega^{2n}(V_{\mathbb{R}})\big)$$

Cohomologies de de Rham analytique et algébrique

On pose : $H^i_{\mathrm{DR}}(V_{an}) = \mathbb{H}^i\big(\Omega^0(V_{an}) \to \cdots \to \Omega^n(V_{an})\big)$,

$H^i_{\mathrm{DR}}(V) = \mathbb{H}^i\big(\Omega^0(V) \to \cdots \to \Omega^n(V)\big)$.

Poincaré analytique donne : $H^i_{\mathrm{DR}}(V_{an}) = H^i\big(V(\mathbb{C}), \mathbb{C}\big) = H^i_{\mathrm{DR}}(V_{\mathbb{R}})$.

Théorème de comparaison de Grothendieck

L'application naturelle $H^i_{\mathrm{DR}}(V) \to H^i_{\mathrm{DR}}(V_{an})$ est un isomorphisme.

En particulier, si V est une *variété affine*, on a

$$H^n\big(V(\mathbb{C}), \mathbb{C}\big) = H^n_{\mathrm{DR}}(V) = \Omega^n(V)/d\big(\Omega^{n-1}(V)\big) .$$

Soit $f : V \to S$ un morphisme lisse de variétés algébriques lisses .

On note $\Omega^m(V/S)$ les S-formes différentielles algébriques de degré m sur V et on pose $\mathcal{H}^i_{\mathrm{DR}}(V/S) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{R}^i f_*\big(\Omega^\bullet(V/S)\big)$.

Représentations intégrales : cohomologie relative

Soit $f : V \to S$ un morphisme lisse de variétés algébriques lisses .

On note $\Omega^m(V/S)$ les S-formes différentielles algébriques de degré m sur V et on pose $\mathcal{H}^i_{\mathrm{DR}}(V/S) \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{R}^i f_*\big(\Omega^\bullet(V/S)\big)$.

Pour chaque i , $\mathcal{H}^i_{\mathrm{DR}}(V/S)$ est un faisceau sur S qui est muni d'une connexion intégrable appelée *connexion de Gauss-Manin*.

Représentations intégrales : cohomologie relative

Soit $f : V \to S$ un morphisme lisse de variétés algébriques lisses .

On note $\Omega^m(V/S)$ les S-formes différentielles algébriques de degré m sur V et on pose $\mathcal{H}^i_{\mathrm{DR}}(V/S) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{R}^i f_*\big(\Omega^\bullet(V/S)\big)$.

Pour chaque i , $\mathcal{H}^i_{\mathrm{DR}}(V/S)$ est un faisceau sur S qui est muni d'une connexion intégrable appelée *connexion de Gauss-Manin*.

Grossièrement parlant, il s'agit d'une dérivation sous le signe $\int$:

on veut calculer $\frac{d}{dx}\int \omega$ avec $\omega = f(x, x_1, \dots, x_\ell)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$,

les $x_{n+1}, \dots, x_\ell$ étant *liés* par $\ell - n$ relations $g_i(x, x_1, \dots, x_\ell) = 0$.

On décide que $\frac{dx_i}{dx} = \frac{d}{dx}(dx_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$

et on calcule les autres $\frac{dx_i}{dx}$ à l'aide des relations $g_i = 0$.

Le résultat obtenu pour $\frac{d}{dx}(\omega)$ ne dépend des variables "indépendantes" $x_1, \dots, x_n$ choisies qu'*à une différentielle exacte près*.

Représentations intégrales : pourquoi la “dimension centrale” ?

Représentations intégrales : pourquoi la "dimension centrale" ?

Soit V une variété algébrique de *dimension n*.

Théorème de Lefschetz (facile)

et soit W une *section hyperplane* de V telle que $V - W$ soit lisse.

$$H^i_{\mathrm{DR}}(V) \to H^i_{\mathrm{DR}}(W) \text{ est } \begin{cases} \text{un } \textit{isomorphisme} \text{ pour} & i < n-1 \\ \text{une } \textit{injection} \text{ pour} & i = n-1. \end{cases}$$

"Etudier" $\int f(x,y,z)\,dx \wedge dy$ revient (presque) à étudier $\int f(x,y,ax+by)\,dx \wedge dy$ pour des coefficients a et b bien choisis ...

Représentations intégrales : pourquoi la “dimension centrale” ?

Soit V une variété algébrique de *dimension n*.

Théorème de Lefschetz (facile)

et soit W une *section hyperplane* de V telle que $V - W$ soit lisse.

$$H^i_{\mathrm{DR}}(V) \to H^i_{\mathrm{DR}}(W) \text{ est } \begin{cases} \text{un } \textit{isomorphisme} \text{ pour} & i < n-1 \\ \text{une } \textit{injection} \text{ pour} & i = n-1. \end{cases}$$

“Etudier” $\int f(x,y,z)\,dx \wedge dy$ revient (presque) à étudier $\int f(x,y,ax+by)\,dx \wedge dy$ pour des coefficients a et b bien choisis ...

Théorème de Lefschetz (difficile)

Pour $r \geq 1$, on a un isomorphisme $H^{n-r}_{\mathrm{DR}}(V) \xrightarrow{\sim} H^{n+r}_{\mathrm{DR}}(V)$

Représentations intégrales : un peu de terminologie

Connexion de Gauss-Manin

$\mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S) \otimes \mathbb{Q}(x)$ est un $\mathbb{Q}(x)$ espace vectoriel de *dimension finie* sur lequel agit la dérivation $\frac{d}{dx}$.

Représentations intégrales : un peu de terminologie

Connexion de Gauss-Manin

$\mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S) \otimes \mathbb{Q}(x)$ est un $\mathbb{Q}(x)$ espace vectoriel de *dimension finie* sur lequel agit la dérivation $\frac{d}{dx}$.

Les “solutions” de ce module à connexion sont données par les $\int_\gamma$.

Représentations intégrales : un peu de terminologie

Connexion de Gauss-Manin

$\mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S) \otimes \mathbb{Q}(x)$ est un $\mathbb{Q}(x)$ espace vectoriel de *dimension finie* sur lequel agit la dérivation $\frac{d}{dx}$.

Les "solutions" de ce module à connexion sont données par les $\int_\gamma$.

Equation de Picard-Fuchs

Pour ω forme différentielle sur V de degré n, il existe L_ω dans $\mathbb{Z}[x][\frac{d}{dx}]$ tel que $L_\omega(\omega)$ soit une "différentielle exacte".

Les *"périodes"* $\int_\gamma \omega(x)$ sont les solutions de L_ω (au-dessus de S).

Représentations intégrales : un peu de terminologie

Connexion de Gauss-Manin

$\mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S) \otimes \mathbb{Q}(x)$ est un $\mathbb{Q}(x)$ espace vectoriel de *dimension finie* sur lequel agit la dérivation $\frac{d}{dx}$.

Les "solutions" de ce module à connexion sont données par les $\int_\gamma$.

Equation de Picard-Fuchs

Pour ω forme différentielle sur V de degré n, il existe L_ω dans $\mathbb{Z}[x][\frac{d}{dx}]$ tel que $L_\omega(\omega)$ soit une "différentielle exacte".

Les *"périodes"* $\int_\gamma \omega(x)$ sont les solutions de L_ω (au-dessus de S).

Equation minimale

On note $L_{\omega,\gamma}$ le polynôme différentiel minimal de $\mathbb{Z}[x][\frac{d}{dx}]$ tel que

$$L_{\omega,\gamma}\Big(\int_\gamma \omega(x)\Big) = 0 \ .$$

Preuve de DFR : être ou ne pas être évanescent

Preuve de DFR : être ou ne pas être évanescent

Par le *théorème de résolution des singularités* (plongées) d'Hironaka on se ramène au cas où V_0 *est un diviseur à croisements normaux*.

Preuve de DFR : être ou ne pas être évanescent

Par le *théorème de résolution des singularités* (plongées) d'Hironaka on se ramène au cas où V_0 *est un diviseur à croisements normaux*.

Par le *théorème de réduction semi-stable* , quitte à *ramifier la variable* x on se ramène à V_0 *réduit* .

Preuve de DFR : être ou ne pas être évanescent

Par le *théorème de résolution des singularités* (plongées) d'Hironaka on se ramène au cas où V_0 *est un diviseur à croisements normaux*.

Par le *théorème de réduction semi-stable* , quitte à *ramifier la variable* x on se ramène à V_0 *réduit* .

En pratique cela signifie que, *pour tout point* P *de* V_0, on peut choisir des *coordonnées locales* $x_0, x_1 \ldots, x_n$ telles que, au voisinage du point P,

"l'équation" de V soit : $x_0\, x_1 \cdots x_r = x$, $(0 \leq r \leq n)$

Par le *théorème de résolution des singularités* (plongées) d'Hironaka on se ramène au cas où V_0 *est un diviseur à croisements normaux*.

Par le *théorème de réduction semi-stable* , quitte à *ramifier la variable* x on se ramène à V_0 *réduit* .

En pratique cela signifie que, *pour tout point* P *de* V_0, on peut choisir des *coordonnées locales* $x_0, x_1 \ldots, x_n$ telles que, au voisinage du point P,

"l'équation" de V soit : $x_0\, x_1 \cdots x_r = x$, $(0 \leq r \leq n)$

La représentation intégrale s'écrit alors

$$f(x) = \int_\gamma F(x_0, \ldots, x_n)\, \frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_r}{x_r} \wedge dx_{r+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

avec F fonction algébrique

[les pôles multiples disparaissent car on calcule modulo les différentielles exactes].

Preuve de DFR : être ou ne pas être évanescent

Par le *théorème de résolution des singularités* (plongées) d'Hironaka on se ramène au cas où V_0 *est un diviseur à croisements normaux*.

Par le *théorème de réduction semi-stable* , quitte à *ramifier la variable* x on se ramène à V_0 *réduit* .

En pratique cela signifie que, *pour tout point* P *de* V_0, on peut choisir des *coordonnées locales* $x_0, x_1 \ldots, x_n$ telles que, au voisinage du point P,

"l'équation" de V soit : $x_0\, x_1 \cdots x_r = x$, $(0 \leq r \leq n)$

La représentation intégrale s'écrit alors

$$f(x) = \int_\gamma F(x_0, \ldots, x_n)\, \frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_r}{x_r} \wedge dx_{r+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

avec F fonction algébrique

[les pôles multiples disparaissent car on calcule modulo les différentielles exactes].

Si γ est le cycle évanescent de P, on constate que

$$f(x) = \mathrm{Diag}\left(x_{r+1} \cdots x_n\, F(x\, x_{r+1} \cdots x_n, x_1, \ldots, x_n)\right) .$$

Preuve de DFR : filtrations

Preuve de DFR : filtrations

Pour $\mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S)$: par l'ordre du pôle le long de V_0

ω est de poids au moins $n+k$ s'il existe un point P de V_0 près duquel

$$\omega = F(x_0,\ldots,x_n)\ \frac{dx_1}{x_1}\wedge\cdots\wedge\frac{dx_k}{x_k}\wedge dx_{k+1}\wedge\cdots\wedge dx_n \qquad \text{avec } F(0,\ldots,0)\neq 0.$$

Preuve de DFR : filtrations

Pour $\mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S)$: par l'ordre du pôle le long de V_0

ω est de poids au moins $n+k$ s'il existe un point P de V_0 près duquel

$$\omega = F(x_0,\ldots,x_n)\ \frac{dx_1}{x_1}\wedge\cdots\wedge\frac{dx_k}{x_k}\wedge dx_{k+1}\wedge\cdots\wedge dx_n \qquad \text{avec } F(0,\ldots,0)\neq 0.$$

Pour $\mathcal{S}$ (solutions de l'équation de Picard-Fuchs) : par la monodromie

Solutions	f ,	$\{f\ log(x)+\cdots\}$,	... ,	$\{f\ log^k(x)+\cdots\}$	(k maximum)
Poids	$-k$	$-k+2$	...	$+k$	

Preuve de DFR : filtrations

Pour $\mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S)$: par l'ordre du pôle le long de V_0

ω est de poids au moins $n+k$ s'il existe un point P de V_0 près duquel

$$\omega = F(x_0,\ldots,x_n)\ \frac{dx_1}{x_1}\wedge\cdots\wedge\frac{dx_k}{x_k}\wedge dx_{k+1}\wedge\cdots\wedge dx_n \qquad \text{avec } F(0,\ldots,0)\neq 0.$$

Pour $\mathcal{S}$ (solutions de l'équation de Picard-Fuchs) : par la monodromie

Solutions	f ,	$\{f\ log(x)+\cdots\}$,	... ,	$\{f\ log^k(x)+\cdots\}$	(k maximum)
Poids	$-k$	$-k+2$	...	$+k$	

Théorème de Deligne-Steenbrink-Zucker

Les deux filtrations sont en dualité (via $(\gamma,\omega)\to\int_\gamma \omega(x)$) :

$$M_k\left(\mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S)\right) = \mathtt{Ann}\ M_{n-k+1}\ (\mathcal{S})$$

Preuve de DFR : filtrations

Pour $\mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S)$: par l'ordre du pôle le long de V_0

ω est de poids au moins $n+k$ s'il existe un point P de V_0 près duquel

$$\omega = F(x_0,\ldots,x_n)\,\frac{dx_1}{x_1}\wedge\cdots\wedge\frac{dx_k}{x_k}\wedge dx_{k+1}\wedge\cdots\wedge dx_n \qquad \text{avec } F(0,\ldots,0)\neq 0.$$

Pour $\mathcal{S}$ (solutions de l'équation de Picard-Fuchs) : par la monodromie

Solutions	f ,	$\{f\,log(x)+\cdots\}$,	… ,	$\{f\,log^k(x)+\cdots\}$	(k maximum)
Poids	$-k$	$-k+2$	…	$+k$	

Théorème de Deligne-Steenbrink-Zucker

Les deux filtrations sont en dualité (via $(\gamma,\omega)\to\int_\gamma \omega(x)$) :

$$M_k\left(\mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S)\right) = \mathtt{Ann}\; M_{n-k+1}\left(\mathcal{S}\right)$$

Corollaire : preuve de DFR pour le poids minimum

Les solutions de l'équation de Picard-Fuchs de poids $-n$ (donc minimum) sont des diagonales de fractions rationnelles.

Preuve de DFR : pour les fonctions hypergéométriques

Preuve de DFR : pour les fonctions hypergéométriques

Pour $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n+1})$ et $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ rationnels, la fonction

$$F(x) \overset{\text{déf}}{=} {}_{n+1}F_n(a_1, \dots, a_{n+1}; b_1, \dots, b_n; x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a_1)_s \dots (a_{n+1})_s}{(b_1)_s \dots (b_n)_s} \frac{x^s}{s!}$$

$$(a)_0 = 1 \quad , \qquad (a)_s = a(a+1)(a+2)...(a+s-1), \qquad (s \geq 1)$$

Preuve de DFR : pour les fonctions hypergéométriques

Pour $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n+1})$ et $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ rationnels, la fonction

$$F(x) \stackrel{\text{déf}}{=} {}_{n+1}F_n(a_1, \dots, a_{n+1}; b_1, \dots, b_n; x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a_1)_s \dots (a_{n+1})_s}{(b_1)_s \dots (b_n)_s} \frac{x^s}{s!}$$

$$(a)_0 = 1 \quad , \qquad (a)_s = a(a+1)(a+2)...(a+s-1), \qquad (s \geq 1)$$

vient de la géométrie : ${}_1F_0(a_1; ; x) = (1-x)^{a_1}$ et, pour $n > 1$,

$${}_{n+1}F_n\left(\mathbf{a}, a_{n+1}; \mathbf{b}, b_n; x\right) = \quad \text{cste} \int_0^1 t^{a_{n+1}-1}(1-t)^{b_n - a_{n+1} - 1}\ {}_nF_{n-1}\left(\mathbf{a}; \mathbf{b}; t\,x\right) dt$$

et est D-finie :

$$x \prod_{i=1}^{n+1} \left(x \frac{d}{dx} + a_i \right) F(x) = x \frac{d}{dx} \prod_{i=1}^{n} \left(x \frac{d}{dx} + b_i - 1 \right) F(x) \ .$$

Preuve de DFR : pour les fonctions hypergéométriques

Pour $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ et $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ rationnels, la fonction

$$F(x) \overset{\text{déf}}{=} {}_{n+1}F_n(a_1, \ldots, a_{n+1}; b_1, \ldots, b_n; x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a_1)_s \ldots (a_{n+1})_s}{(b_1)_s \ldots (b_n)_s} \frac{x^s}{s!}$$

$$(a)_0 = 1 \quad , \qquad (a)_s = a(a+1)(a+2)...(a+s-1), \qquad (s \geq 1)$$

vient de la géométrie : ${}_1F_0(a_1;;x) = (1-x)^{a_1}$ et, pour $n > 1$,

$${}_{n+1}F_n\left(\mathbf{a}, a_{n+1}; \mathbf{b}, b_n; x\right) = \quad \text{cste} \int_0^1 t^{a_{n+1}-1}(1-t)^{b_n - a_{n+1} - 1} \; {}_nF_{n-1}\left(\mathbf{a}; \mathbf{b}; t\,x\right) dt$$

et est D-finie :

$$x \prod_{i=1}^{n+1} \left(x\frac{d}{dx} + a_i \right) F(x) = x\frac{d}{dx} \prod_{i=1}^{n} \left(x\frac{d}{dx} + b_i - 1 \right) F(x) \,.$$

C'est donc une *"pseudo diagonale"* ssi elle est *"globalement bornée"*.

Preuve de DFR : pour les fonctions hypergéométriques

Pour $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ et $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ rationnels, la fonction

$$F(x) \overset{\text{déf}}{=} {}_{n+1}F_n(a_1, \ldots, a_{n+1}; b_1, \ldots, b_n; x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a_1)_s \ldots (a_{n+1})_s}{(b_1)_s \ldots (b_n)_s} \frac{x^s}{s!}$$

$$(a)_0 = 1 \quad , \qquad (a)_s = a(a+1)(a+2)...(a+s-1), \qquad (s \geq 1)$$

vient de la géométrie : ${}_1F_0(a_1;;x) = (1-x)^{a_1}$ et, pour $n > 1$,

$${}_{n+1}F_n\left(\mathbf{a}, a_{n+1}; \mathbf{b}, b_n; x\right) = \quad \text{cste} \int_0^1 t^{a_{n+1}-1}(1-t)^{b_n - a_{n+1}-1} \; {}_nF_{n-1}\left(\mathbf{a}; \mathbf{b}; t\,x\right) dt$$

et est D-finie :

$$x \prod_{i=1}^{n+1} \left(x \frac{d}{dx} + a_i \right) F(x) = x \frac{d}{dx} \prod_{i=1}^{n} \left(x \frac{d}{dx} + b_i - 1 \right) F(x) \; .$$

C'est donc une *"pseudo diagonale"* ssi elle est *"globalement bornée"*.

Ici, dim. relative $(V) = n$ et ordre de l'éq. diff. $= n+1$
d'où la confusion entre "MUM" et "solution de poids minimum".

Soit $N \geq 2$, soit V_x définie par les équations :

$$x_1^N + y_1^N + 1 = 0 \ , \quad x_2^N + y_2^N + 1 = 0 \ , \quad x_3^N + y_3^N + 1 = 0 \ , \quad x_1 x_2 x_3 = x \ .$$

(donc de dimension relative 2) et soit

$$\omega(x) = x_1^p \, y_1^q \, x_2^r \, y_2^s \, y_3^t \, \frac{dx_1}{x_1} \, \frac{dx_2}{x_2} \ .$$

Alors pour un cycle bien choisi γ on a :

$$\int_\gamma \omega(x) = \text{cste} \quad {}_3F_2\left(\tfrac{-t}{N}, \tfrac{-p-q}{N}, \tfrac{-r-s}{N}; \tfrac{N-r}{N}, \tfrac{N-p}{N}; x^N\right) \ .$$

Représentation alternative des fonctions hypergéométriques

Soit $N \geq 2$, soit V_x définie par les équations :

$$x_1^N + y_1^N + 1 = 0 \ , \quad x_2^N + y_2^N + 1 = 0 \ , \quad x_3^N + y_3^N + 1 = 0 \ , \quad x_1 x_2 x_3 = x \ .$$

(donc de dimension relative 2) et soit

$$\omega(x) = x_1^p \, y_1^q \, x_2^r \, y_2^s \, y_3^t \, \frac{dx_1}{x_1} \, \frac{dx_2}{x_2} \ .$$

Alors pour un cycle bien choisi γ on a :

$$\int_\gamma \omega(x) = \text{cste} \quad {}_3F_2\big(\tfrac{-t}{N}, \tfrac{-p-q}{N}, \tfrac{-r-s}{N}; \tfrac{N-r}{N}, \tfrac{N-p}{N}; x^N\big) \ .$$

Remarque

La fibre V_0 est la réunion de 3 familles de N diviseurs à croisements “presque normaux”. Ceux de la première, par exemple, sont d'équations

$$x_1 = 0 \ , \quad y_1^N + 1 = 0 \ , \quad x_2^N + y_2^N + 1 = 0 \ , \quad x_3^N + y_3^N + 1 = 0 \ .$$

Preuve de DFR pour les F.H. :

Preuve de DFR pour les F.H. : poids $-n$

Le poids de ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est : $-$ (le nombre de i tels que $b_i \in \mathbb{Z}$) .

La conjecture DFR est vraie pour le poids $-n$

Le corollaire dit que ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};1,\ldots,1;x)$ est une DFR et en effet :

$${}_{n+1}F_n(a_1,\ldots,a_{n+1};1,\ldots,1;x) = (1-x)^{a_1} \star \cdots \star (1-x)^{a_{n+1}}$$

Preuve de DFR pour les F.H. : poids $-n$ et poids 0

Le poids de ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est : $-$ (le nombre de i tels que $b_i \in \mathbb{Z}$) .

La conjecture DFR est vraie pour le poids $-n$

Le corollaire dit que ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};1,\ldots,1;x)$ est une DFR et en effet :

$$ {}_{n+1}F_n(a_1,\ldots,a_{n+1};1,\ldots,1;x) = (1-x)^{a_1} \star \cdots \star (1-x)^{a_{n+1}} $$

La conjecture DFR est vraie pour le poids 0

Preuve de DFR pour les F.H. : poids $-n$ et poids 0

Le poids de ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est : $-$ (le nombre de i tels que $b_i \in \mathbb{Z}$) .

La conjecture DFR est vraie pour le poids $-n$

Le corollaire dit que ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};1,\ldots,1;x)$ est une DFR et en effet :

$$ {}_{n+1}F_n(a_1,\ldots,a_{n+1};1,\ldots,1;x) = (1-x)^{a_1} \star \cdots \star (1-x)^{a_{n+1}} $$

La conjecture DFR est vraie pour le poids 0

On suppose les a_i et b_i dans $\dfrac{1}{N}\mathbb{Z}$ et les $b_i \notin \mathbb{Z}$.

Preuve de DFR pour les F.H. : poids $-n$ et poids 0

Le poids de ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est : $-$ (le nombre de i tels que $b_i \in \mathbb{Z}$) .

La conjecture DFR est vraie pour le poids $-n$

Le corollaire dit que ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};1,\ldots,1;x)$ est une DFR et en effet :

$${}_{n+1}F_n(a_1,\ldots,a_{n+1};1,\ldots,1;x) = (1-x)^{a_1} \star \cdots \star (1-x)^{a_{n+1}}$$

La conjecture DFR est vraie pour le poids 0

On suppose les a_i et b_i dans $\dfrac{1}{N}\mathbb{Z}$ et les $b_i \notin \mathbb{Z}$.

La fonction ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est globalement bornée et de poids 0,

Preuve de DFR pour les F.H. : poids $-n$ et poids 0

Le poids de ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est : $-$ (le nombre de i tels que $b_i \in \mathbb{Z}$) .

La conjecture DFR est vraie pour le poids $-n$

Le corollaire dit que ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};1,\ldots,1;x)$ est une DFR et en effet :

$${}_{n+1}F_n(a_1,\ldots,a_{n+1};1,\ldots,1;x) = (1-x)^{a_1} \star \cdots \star (1-x)^{a_{n+1}}$$

La conjecture DFR est vraie pour le poids 0

On suppose les a_i et b_i dans $\dfrac{1}{N}\mathbb{Z}$ et les $b_i \notin \mathbb{Z}$.

La fonction ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est globalement bornée et de poids 0,

$\Rightarrow \big(\forall k,\ (k,N)=1\big)$ les $\exp(2i\pi\, k\, a_i)$ et les $\exp(2i\pi\, k\, b_i)$ sont entrelacés ,

Preuve de DFR pour les F.H. : poids $-n$ et poids 0

Le poids de ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est : $-$ (le nombre de i tels que $b_i \in \mathbb{Z}$) .

La conjecture DFR est vraie pour le poids $-n$

Le corollaire dit que ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};1,\dots,1;x)$ est une DFR et en effet :

$$ {}_{n+1}F_n(a_1,\dots,a_{n+1};1,\dots,1;x) = (1-x)^{a_1} \star \cdots \star (1-x)^{a_{n+1}} $$

La conjecture DFR est vraie pour le poids 0 (Beukers-Heckman)

On suppose les a_i et b_i dans $\dfrac{1}{N}\mathbb{Z}$ et les $b_i \notin \mathbb{Z}$.

La fonction ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est globalement bornée et de poids 0,

$\Rightarrow \big(\forall k,\ (k,N)=1\big)$ les $\exp(2i\pi\, k\, a_i)$ et les $\exp(2i\pi\, k\, b_i)$ sont entrelacés ,

$\Rightarrow$ Le groupe de monodromie de l'équation hypergéométrique est fini,

Preuve de DFR pour les F.H. : poids $-n$ et poids 0

Le poids de ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est : $-$ (le nombre de i tels que $b_i \in \mathbb{Z}$) .

La conjecture DFR est vraie pour le poids $-n$

Le corollaire dit que ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};1,\ldots,1;x)$ est une DFR et en effet :

$$ {}_{n+1}F_n(a_1,\ldots,a_{n+1};1,\ldots,1;x) = (1-x)^{a_1} \star \cdots \star (1-x)^{a_{n+1}} $$

La conjecture DFR est vraie pour le poids 0 (Beukers-Heckman)

On suppose les a_i et b_i dans $\frac{1}{N}\mathbb{Z}$ et les $b_i \notin \mathbb{Z}$.

La fonction ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est globalement bornée et de poids 0,

$\Rightarrow$ $\big(\forall k,\ (k,N)=1\big)$ les $\exp(2i\pi\, k\, a_i)$ et les $\exp(2i\pi\, k\, b_i)$ sont entrelacés ,

$\Rightarrow$ Le groupe de monodromie de l'équation hypergéométrique est fini,

$\Rightarrow$ La fonction ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est algébrique.

Preuve de DFR pour les F.H. : poids $-n$ et poids 0

Le poids de ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est : $-$ (le nombre de i tels que $b_i \in \mathbb{Z}$) .

La conjecture DFR est vraie pour le poids $-n$

Le corollaire dit que ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};1,\ldots,1;x)$ est une DFR et en effet :

$$ {}_{n+1}F_n(a_1,\ldots,a_{n+1};1,\ldots,1;x) = (1-x)^{a_1} \star \cdots \star (1-x)^{a_{n+1}} $$

La conjecture DFR est vraie pour le poids 0 (Beukers-Heckman)

On suppose les a_i et b_i dans $\dfrac{1}{N}\mathbb{Z}$ et les $b_i \notin \mathbb{Z}$. Les conditions :

1) La fonction ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est globalement bornée et de poids 0,

2) $\big(\forall k,\ (k,N)=1\big)$ les $\exp(2i\pi\, k\, a_i)$ et les $\exp(2i\pi\, k\, b_i)$ sont entrelacés ,

3) Le groupe de monodromie de l'équation hypergéométrique est fini,

4) La fonction ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est algébrique.

sont équivalentes.

Conjecture DFR pour les F.H. : les cas intermédiaires

Conjecture DFR pour les F.H. : les cas intermédiaires

On peut décider facilement si ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a}; \mathbf{b}; x)$ est globalement bornée.

Conjecture DFR pour les F.H. : les cas intermédiaires

On peut décider facilement si ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est globalement bornée.

On trouve des ${}_{n+1}F_n$ globalement bornées et de poids $k \in]-n, 0[$:

${}_3F_2(\frac{1}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9};\frac{1}{3},1;x)$, ${}_3F_2(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7};\frac{1}{2},1;x)$, ${}_3F_2(\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{6}{11};\frac{1}{2},1;x)$, ...

et aussi des ${}_4F_3$ de poids -1 ou -2 .

Conjecture DFR pour les F.H. : les cas intermédiaires

On peut décider facilement si $_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est globalement bornée.

On trouve des $_{n+1}F_n$ globalement bornées et de poids $k \in]-n, 0[$:
$_3F_2(\frac{1}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9};\frac{1}{3},1;x)$, $_3F_2(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7};\frac{1}{2},1;x)$, $_3F_2(\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{6}{11};\frac{1}{2},1;x)$, . . .
et aussi des $_4F_3$ de poids -1 ou -2 .

REMARQUE : on cherche des exemples *primitifs* (qui ne soient pas des produits de Hadamard de fonctions plus simples) et *représentatifs* (chaque exemple en donne plusieurs autres par les transformations $a_i \to k\, a_i \quad b_i \to k\, b_i \quad (k, N) = 1$.

Ainsi $(\frac{1}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9};\frac{1}{3},1) \to (\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{8}{9};\frac{2}{3},1) \to (\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9};\frac{1}{3},1)$
$\to (\frac{2}{9},\frac{5}{9},\frac{7}{9};\frac{2}{3},1) \to (\frac{1}{9},\frac{7}{9},\frac{8}{9};\frac{1}{3},1) \to (\frac{4}{9},\frac{5}{9},\frac{8}{9};\frac{2}{3},1)$
Par contre $(\frac{1}{9},\frac{4}{9},\frac{7}{9};\frac{1}{3},1)$ ne donne que $(\frac{2}{9},\frac{5}{9},\frac{8}{9};\frac{2}{3},1)$!)

CES PSEUDO -DIAGONALES SONT-ELLES DES DIAGONALES ???

Soit $f(x) = \int_\gamma \omega(x)$ avec $\omega \in \mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S)$.

Notations

- $V \to V_p$ réduction modulo p (c'est possible $\mathrm{pp}\forall p$)
- $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p)$ cohomologie (relative) "*p-adique*" de V_p (à définir)
- $E_p =$ complété de $\mathbb{Q}(x)$ pour la norme de Gauss p-adique.

DFR faible : schéma de preuve

Soit $f(x) = \int_\gamma \omega(x)$ avec $\omega \in \mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S)$.

Notations

- $V \to V_p$ réduction modulo p (c'est possible $\mathrm{pp}\forall p$)
- $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p)$ cohomologie (relative) "*p-adique*" de V_p (à définir)
- $E_p =$ complété de $\mathbb{Q}(x)$ pour la norme de Gauss p-adique.

Points à prouver

1. $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p)$ est un $\mathcal{O}$-module à connexion avec $\mathbb{Z}_p[x] \subset \mathcal{O} \subset E_p$:

Soit $f(x) = \int_\gamma \omega(x)$ avec $\omega \in \mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S)$.

Notations

- $V \to V_p$ réduction modulo p (c'est possible $\mathrm{pp}\forall p$)
- $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p)$ cohomologie (relative) "*p-adique*" de V_p (à définir)
- $E_p =$ complété de $\mathbb{Q}(x)$ pour la norme de Gauss p-adique.

Points à prouver

1. $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p)$ est un $\mathcal{O}$-module à connexion avec $\mathbb{Z}_p[x] \subset \mathcal{O} \subset E_p$:
   - On a une injection $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p) \otimes E_p \to \mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S) \otimes E_p$,

Soit $f(x) = \int_\gamma \omega(x)$ avec $\omega \in \mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S)$.

Notations

- $V \to V_p$ réduction modulo p (c'est possible $\mathrm{pp}\forall p$)
- $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p)$ cohomologie (relative) "*p-adique*" de V_p (à définir)
- $E_p =$ complété de $\mathbb{Q}(x)$ pour la norme de Gauss p-adique.

Points à prouver

1. $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p)$ est un $\mathcal{O}$-module à connexion avec $\mathbb{Z}_p[x] \subset \mathcal{O} \subset E_p$:
   - On a une injection $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p) \otimes E_p \to \mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S) \otimes E_p$,
   - Le Frobenius ϕ_p : $V_p \to V_p$ donne, par fonctorialité, une *"structure de Frobenius (forte)"* sur $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p) \otimes E_p$.

Soit $f(x) = \int_\gamma \omega(x)$ avec $\omega \in \mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S)$.

Notations

- $V \to V_p$ réduction modulo p (c'est possible $\mathrm{pp}\forall p$)
- $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p)$ cohomologie (relative) "*p-adique*" de V_p (à définir)
- E_p = complété de $\mathbb{Q}(x)$ pour la norme de Gauss p-adique.

Points à prouver

1. $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p)$ est un $\mathcal{O}$-module à connexion avec $\mathbb{Z}_p[x] \subset \mathcal{O} \subset E_p$:
   - On a une injection $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p) \otimes E_p \to \mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S) \otimes E_p$,
   - Le Frobenius ϕ_p : $V_p \to V_p$ donne, par fonctorialité, une *"structure de Frobenius (forte)"* sur $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p) \otimes E_p$.
2. Si $f \in \mathbb{Z}_p[[x]]$ est solution d'une équation différentielle de $E_p[\frac{d}{dx}]$ munie d'une structure de Frobenius forte,

DFR faible : schéma de preuve

Soit $f(x) = \int_\gamma \omega(x)$ avec $\omega \in \mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S)$.

Notations

- $V \to V_p$ réduction modulo p (c'est possible $\mathrm{pp}\forall p$)
- $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p)$ cohomologie (relative) "*p-adique*" de V_p (à définir)
- E_p = complété de $\mathbb{Q}(x)$ pour la norme de Gauss p-adique.

Points à prouver

1. $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p)$ est un $\mathcal{O}$-module à connexion avec $\mathbb{Z}_p[x] \subset \mathcal{O} \subset E_p$:
   - On a une injection $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p) \otimes E_p \to \mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S) \otimes E_p$,
   - Le Frobenius $\phi_p : V_p \to V_p$ donne, par fonctorialité, une *"structure de Frobenius (forte)"* sur $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p) \otimes E_p$.
2. Si $f \in \mathbb{Z}_p[[x]]$ est solution d'une équation différentielle de $E_p[\frac{d}{dx}]$ munie d'une structure de Frobenius forte, alors, pour tout $h > 1$, elle est p-automatique modulo p^h.

DFR faible : existence et propriétés des $\mathcal{H}_p^n(V_p/S_p)$

Théorie de Dwork-Katz — Period Matrices (1968)

Soit $V \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{Q}(x)}$ une hypersurface *non singulière et en position générale*,

DFR faible : existence et propriétés des $\mathcal{H}_p^n(V_p/S_p)$

Théorie de Dwork-Katz — Period Matrices (1968)

Soit $V \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{Q}(x)}$ une hypersurface *non singulière et en position générale*,

[d'équation (homogène) $F(x, X_0, \ldots, X_{n+1}) = 0$, $F \in \mathbb{Q}[x][X_0, \ldots, X_{n+1}]$ et

$R(x) := \mathtt{résultant}\left\{X_i \frac{\partial F}{\partial X_i}\right\}_{0 \leq i \leq n+1} \neq 0$ (les $X_i \frac{\partial F}{\partial X_i}$ sans zéro commun).]

Alors on sait définir les $\mathcal{H}_p^n(V_p/S_p)$ (resp. $\mathcal{H}_p^n\left((\mathbb{P}^{n+1} - V)_p/S_p\right)$

DFR faible : existence et propriétés des $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p)$

Théorie de Dwork-Katz — Period Matrices (1968)

Soit $V \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{Q}(x)}$ une hypersurface *non singulière et en position générale*,
[d'équation (homogène) $F(x, X_0, \dots, X_{n+1}) = 0$, $F \in \mathbb{Q}[x][X_0, \dots, X_{n+1}]$ et
$R(x) := \texttt{résultant}\left\{X_i \frac{\partial F}{\partial X_i}\right\}_{0 \le i \le n+1} \neq 0$ (les $X_i \frac{\partial F}{\partial X_i}$ sans zéro commun).]

Alors on sait définir les $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p)$ (resp. $\mathcal{H}^n_p\left((\mathbb{P}^{n+1} - V)_p/S_p\right)$

- Les "bons" p sont ceux pour lesquels $|R|_p = 1$ ($|.|_p$ norme de Gauss).

DFR faible : existence et propriétés des $\mathcal{H}_p^n(V_p/S_p)$

Théorie de Dwork-Katz — Period Matrices (1968)

Soit $V \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{Q}(x)}$ une hypersurface *non singulière et en position générale*,

[d'équation (homogène) $F(x, X_0, \ldots, X_{n+1}) = 0$, $F \in \mathbb{Q}[x][X_0, \ldots, X_{n+1}]$ et

$R(x) := \texttt{résultant}\left\{X_i \frac{\partial F}{\partial X_i}\right\}_{0 \le i \le n+1} \neq 0$ (les $X_i \frac{\partial F}{\partial X_i}$ sans zéro commun).]

Alors on sait définir les $\mathcal{H}_p^n(V_p/S_p)$ (resp. $\mathcal{H}_p^n\left((\mathbb{P}^{n+1} - V)_p/S_p\right)$

- Les "bons" p sont ceux pour lesquels $|R|_p = 1$ ($|.|_p$ norme de Gauss).
- $\mathcal{H}_p^n(V_p^\emptyset/S_p) \sim \mathcal{L}/\left(D_x\mathcal{L} + \sum_i D_{X_i}\mathcal{L}\right)$ $\mathcal{H}_p^n((\mathbb{P}^{n+1} - V)_p^\emptyset/S_p) \sim \mathcal{L}/\left(\sum_i D_{X_i}\mathcal{L}\right)$
  $\big(D$ dériv. "tordue" par $e^{-\pi x F}$ - $V^\emptyset = V \bigcap \{X_0 \cdots X_{n+1} \neq 0\}\big)$.
- $\mathcal{O} = \Big\{$ éléments analytiques sur $\left\{x \in \mathbb{C}_p \,;\, |R(x)|_p = 1\right\}\Big\}$.

DFR faible : existence et propriétés des $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p)$

Théorie de Dwork-Katz — Period Matrices (1968)

Soit $V \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{Q}(x)}$ une hypersurface *non singulière et en position générale*,

[d'équation (homogène) $F(x, X_0, \ldots, X_{n+1}) = 0$, $F \in \mathbb{Q}[x][X_0, \ldots, X_{n+1}]$ et

$R(x) := \texttt{résultant}\,\left\{X_i \frac{\partial F}{\partial X_i}\right\}_{0 \leq i \leq n+1} \neq 0$ (les $X_i \frac{\partial F}{\partial X_i}$ sans zéro commun).]

Alors on sait définir les $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p)$ (resp. $\mathcal{H}^n_p\left((\mathbb{P}^{n+1} - V)_p/S_p\right)$

- Les "bons" p sont ceux pour lesquels $|R|_p = 1$ ($|.|_p$ norme de Gauss).
- $\mathcal{H}^n_p(V^\emptyset_p/S_p) \sim \mathcal{L}/\left(D_x\mathcal{L} + \sum_i D_{X_i}\mathcal{L}\right)$ $\mathcal{H}^n_p((\mathbb{P}^{n+1} - V)^\emptyset_p/S_p) \sim \mathcal{L}/\left(\sum_i D_{X_i}\mathcal{L}\right)$
  $\big(D$ dériv. "tordue" par $e^{-\pi x F}$ - $V^\emptyset = V \bigcap \{X_0 \cdots X_{n+1} \neq 0\}\big)$.
- $\mathcal{O} = \left\{ \text{éléments analytiques sur } \{x \in \mathbb{C}_p \,;\ |R(x)|_p = 1\} \right\}$.

Il existe une (et une seule) "bonne" théorie de cohomologie p-adique : celle de Arabia-Mebkhout et leur *modules spéciaux* malheureusement elle n'existe pas encore en cohomologie relative.

DFR faible : existence et propriétés des $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p)$

Théorie de Dwork-Katz — Period Matrices (1968)

Soit $V \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{Q}(x)}$ une hypersurface *non singulière et en position générale*,

[d'équation (homogène) $F(x, X_0, \ldots, X_{n+1}) = 0$, $F \in \mathbb{Q}[x][X_0, \ldots, X_{n+1}]$ et

$R(x) := \texttt{résultant} \left\{X_i \frac{\partial F}{\partial X_i}\right\}_{0 \le i \le n+1} \neq 0$ (les $X_i \frac{\partial F}{\partial X_i}$ sans zéro commun).]

Alors on sait définir les $\mathcal{H}^n_p(V_p/S_p)$ (resp. $\mathcal{H}^n_p\left((\mathbb{P}^{n+1} - V)_p/S_p\right)$

- Les "bons" p sont ceux pour lesquels $|R|_p = 1$ ($|.|_p$ norme de Gauss).
- $\mathcal{H}^n_p(V_p^{\emptyset}/S_p) \sim \mathcal{L}/\left(D_x\mathcal{L} + \sum_i D_{X_i}\mathcal{L}\right)$ $\mathcal{H}^n_p((\mathbb{P}^{n+1} - V)^{\emptyset}_p/S_p) \sim \mathcal{L}/\left(\sum_i D_{X_i}\mathcal{L}\right)$
  $\big(D$ dériv. "tordue" par $e^{-\pi x F}$ - $V^{\emptyset} = V \bigcap \{X_0 \cdots X_{n+1} \neq 0\}\big)$.
- $\mathcal{O} = \Big\{$ éléments analytiques sur $\left\{x \in \mathbb{C}_p \, ; \ |R(x)|_p = 1\right\}\Big\}$.

Il existe une (et une seule) "bonne" théorie de cohomologie p-adique : celle de Arabia-Mebkhout et leur *modules spéciaux* malheureusement elle n'existe pas encore en cohomologie relative.

Cela devrait concerner toutes les fcts "lclt bornées" comme ${}_3F_2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{5}{3}, 1; x)$.

DFR faible : structure de Frobenius et p-automaticité

Remarque

Si f est solution d'une équation différentielle avec structure de Frobenius forte, il existe un entier d et des éléments a_i dans E_p tels que

$$\sum_{i=0}^{d} a_i(x)\, f(x^{p^i}) = 0\ , \qquad \big(a_0\, a_d \neq 0\big) \qquad (C_d)$$

DFR faible : structure de Frobenius et p-automaticité

Remarque

Si f est solution d'une équation différentielle avec structure de Frobenius forte, il existe un entier d et des éléments a_i dans E_p tels que

$$\sum_{i=0}^{d} a_i(x)\, f(x^{p^i}) = 0 \ , \qquad \big(a_0\, a_d \neq 0\big) \qquad (C_d)$$

Théorème — Fonctions et éléments algébriques (1986)

Si une fonction f de $\mathbb{Z}_p[[x]]$ satisfait une relation (C_d) alors c'est une limite (pour la norme de Gauss) de fonctions de $\mathbb{Z}_p[[x]]$ qui sont *algébriques sur E_p* .

DFR faible : structure de Frobenius et p-automaticité

Remarque

Si f est solution d'une équation différentielle avec structure de Frobenius forte, il existe un entier d et des éléments a_i dans E_p tels que

$$\sum_{i=0}^{d} a_i(x)\, f(x^{p^i}) = 0\ , \qquad \left(a_0\, a_d \neq 0\right) \qquad (C_d)$$

Théorème — Fonctions et éléments algébriques (1986)

Si une fonction f de $\mathbb{Z}_p[[x]]$ satisfait une relation (C_d) alors c'est une limite (pour la norme de Gauss) de fonctions de $\mathbb{Z}_p[[x]]$ qui sont *algébriques sur E_p* .

Théorème — ibid.

Si une fonction f de $\mathbb{Z}_p[[x]]$ est *algébrique* sur E_p alors, pour tout $h \geq 1$, elle est *p-automatique* modulo p^h.

Données expérimentales : équa. diff. autoadjointes

L'adjoint de $L = \sum f_i(x) \frac{d^i}{dx^i}$ est $L^* = \sum (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} f_i(x)$.

[On pourrait définir directement la dualité au niveau des modules différentiels]

L'adjoint de $L = \sum f_i(x) \frac{d^i}{dx^i}$ est $L^* = \sum (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} f_i(x)$.

[On pourrait définir directement la dualité au niveau des modules différentiels]

On dira que L est *autoadjoint* si les modules différentiels associés à L et L^* sont *isomorphes*.

L'adjoint de $L = \sum f_i(x) \frac{d^i}{dx^i}$ est $L^* = \sum (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} f_i(x)$.

[On pourrait définir directement la dualité au niveau des modules différentiels]

On dira que L est *autoadjoint* si les modules différentiels associés à L et L^* sont *isomorphes*.

- L autoadjoint

$$\iff \quad \exists\,(M)\ , \quad M = N\,P \text{ et } L = K\,P \Rightarrow \deg P = 0\ , \qquad L\,M = Q\,L^*\ .$$

Données expérimentales : équa. diff. autoadjointes

L'adjoint de $L = \sum f_i(x) \frac{d^i}{dx^i}$ est $L^* = \sum (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} f_i(x)$.

[On pourrait définir directement la dualité au niveau des modules différentiels]

On dira que L est *autoadjoint* si les modules différentiels associés à L et L^* sont *isomorphes*.

- L autoadjoint

$$\Longleftrightarrow \quad \exists\,(M)\ , \quad M = N\,P \text{ et } L = K\,P \Rightarrow \deg P = 0\ , \qquad L\,M = Q\,L^*\ .$$

- Si L est irréductible la condition s'écrit

$$\Longleftrightarrow \quad \exists\,(M)\ , \quad \deg M < \deg L\ , \qquad L\,M = Q\,L^* \qquad (\text{et alors } Q = M^*)\ .$$

L'adjoint de $L = \sum f_i(x) \frac{d^i}{dx^i}$ est $L^* = \sum (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} f_i(x)$.

[On pourrait définir directement la dualité au niveau des modules différentiels]

On dira que L est *autoadjoint* si les modules différentiels associés à L et L^* sont *isomorphes*.

- L autoadjoint

$$\iff \quad \exists\,(M)\ , \quad M = N\,P \text{ et } L = K\,P \Rightarrow \deg P = 0\ , \qquad L\,M = Q\,L^*\ .$$

- Si L est irréductible la condition s'écrit

$$\iff \quad \exists\,(M)\ , \quad \deg M < \deg L\ , \qquad L\,M = Q\,L^* \qquad (\text{et alors } Q = M^*)\ .$$

Remarque

Comme $\hom(L, L^*) = L \otimes L = \mathrm{ext}^2(L) \oplus \mathrm{sym}^2(L)$, L est autoadjoint si et seulement si $\mathrm{ext}^2(L)$ ou $\mathrm{sym}^2(L)$ a une solution rationnelle non nulle.
Cela se "voit" donc dans son groupe de Galois.

Données expérimentales : équa. diff. autoadjointes

Constat

L'équation différentielle (minimale) de $_3F_2(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}; \frac{1}{3}, 1; x)$ *n'est pas autoadjointe* , (même sur les fonctions algébriques).

Données expérimentales : équa. diff. autoadjointes

Constat

L'équation différentielle (minimale) de ${}_3F_2(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}; \frac{1}{3}, 1; x)$ *n'est pas autoadjointe* , (même sur les fonctions algébriques).

Fait expérimental

Les facteurs irréductibles des équations différentielles minimales des diagonales de fractions rationnelles *sur lesquelles on a fait le test* sont presque tous autoadjoints :

- seule exception connue ${}_3F_2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}; 1, 1; x)$.

Données expérimentales : équa. diff. autoadjointes

Constat

L'équation différentielle (minimale) de ${}_3F_2(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}; \frac{1}{3}, 1; x)$ *n'est pas autoadjointe* , (même sur les fonctions algébriques).

Fait expérimental

Les facteurs irréductibles des équations différentielles minimales des diagonales de fractions rationnelles *sur lesquelles on a fait le test* sont presque tous autoadjoints :

- seule exception connue ${}_3F_2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}; 1, 1; x)$.

Est-ce un indice de ce que ${}_3F_2(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}; \frac{1}{3}, 1; x)$ n'est pas une diagonale de fraction rationnelle ?

Le fait expérimental s'explique facilement :

Grâce à *Deligne et Steenbrink-Zucker* on sait que les connexions de Gauss-Manin sont des "variations de structure de Hodge mixtes *polarisées*".

Données expérimentales : équa. diff. autoadjointes

Le fait expérimental s'explique facilement :

Grâce à *Deligne et Steenbrink-Zucker* on sait que les connexions de Gauss-Manin sont des “variations de structure de Hodge mixtes *polarisées*”.

En particulier, cela signifie qu'il existe une filtration (par le poids) dont les gradués associés sont auto-adjoints [ce sont les connexions de Gauss-Manin d'une famille projective et lisse pour laquelle il y a une dualité de Poincaré].

Données expérimentales : équa. diff. autoadjointes

Le fait expérimental s'explique facilement :

Grâce à *Deligne et Steenbrink-Zucker* on sait que les connexions de Gauss-Manin sont des "variations de structure de Hodge mixtes *polarisées*".

En particulier, cela signifie qu'il existe une filtration (par le poids) dont les gradués associés sont auto-adjoints [ce sont les connexions de Gauss-Manin d'une famille projective et lisse pour laquelle il y a une dualité de Poincaré].

Être auto-adjoint n'est stable ni par sous-module ni par quotient !

Données expérimentales : équa. diff. autoadjointes

Le fait expérimental s'explique facilement :

Grâce à *Deligne et Steenbrink-Zucker* on sait que les connexions de Gauss-Manin sont des "variations de structure de Hodge mixtes *polarisées*".

En particulier, cela signifie qu'il existe une filtration (par le poids) dont les gradués associés sont auto-adjoints [ce sont les connexions de Gauss-Manin d'une famille projective et lisse pour laquelle il y a une dualité de Poincaré].

Être auto-adjoint n'est stable ni par sous-module ni par quotient !

Cas "générique" d'une formule intégrale

Si ω est un vecteur cyclique du $\mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S)$, son équation différentielle minimale se décompose en un produit de facteurs auto-adjoints.

Données expérimentales : équa. diff. autoadjointes

Le fait expérimental s'explique facilement :

Grâce à *Deligne et Steenbrink-Zucker* on sait que les connexions de Gauss-Manin sont des "variations de structure de Hodge mixtes *polarisées*".

En particulier, cela signifie qu'il existe une filtration (par le poids) dont les gradués associés sont auto-adjoints [ce sont les connexions de Gauss-Manin d'une famille projective et lisse pour laquelle il y a une dualité de Poincaré].

Être auto-adjoint n'est stable ni par sous-module ni par quotient !

Cas "générique" d'une formule intégrale

Si ω est un vecteur cyclique du $\mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S)$, son équation différentielle minimale se décompose en un produit de facteurs auto-adjoints.

Dans les cas "petits" ces facteurs sont irréductibles.

Données expérimentales : équa. diff. autoadjointes

Le fait expérimental s'explique facilement :

Grâce à *Deligne et Steenbrink-Zucker* on sait que les connexions de Gauss-Manin sont des “variations de structure de Hodge mixtes *polarisées*”.

En particulier, cela signifie qu'il existe une filtration (par le poids) dont les gradués associés sont auto-adjoints [ce sont les connexions de Gauss-Manin d'une famille projective et lisse pour laquelle il y a une dualité de Poincaré].

Être auto-adjoint n'est stable ni par sous-module ni par quotient !

Cas “générique” d'une formule intégrale

Si ω est un vecteur cyclique du $\mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S)$, son équation différentielle minimale se décompose en un produit de facteurs auto-adjoints.

Dans les cas “petits” ces facteurs sont irréductibles.

Par contre l'équation minimale de ${}_3F_2(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}; \frac{1}{3}, 1; x)$ correspond à un sous-module strict du gradué de poids 1.

Données expérimentales : la liste de Almkvist & co.

Dans la liste d'équations de Calabi-Yau, un certain nombre d'exemples font intervenir les sommes harmoniques

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \, ,$$

ce qui semble jeter un doute sur le fait que ces fonctions soient des diagonales de fraction rationnelle.
Grâce à Jean-Marie Maillard, on sait que ce n'est qu'un artifice de présentation et que tout rentre dans l'ordre si on utilise la (nouvelle ?) formule :

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{2n-2k}{n-k} \binom{2k}{k} (H_{n-k} - H_k) = \binom{2n}{n} (2n+1) - 4^n (n+1) \, .$$