Fractions continues : une approche *deviner pour prouver*.

Sébastien Maulat
sous la direction de Bruno Salvy

INRIA, ÉNS de Lyon.

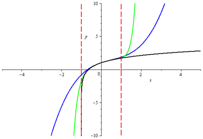
INRIA Saclay, Juillet 2014

Séries de Taylor *vs* Padé

$$f(z) = 1 + \ln(1+z)$$

Taylor	Padé
$f \simeq T$ $\simeq 1 + z + \cdots + \frac{(-1)^n}{n} z^n$	$f \simeq P/Q$

p	T
0	$T_0 = 1$
1	$T_1 = 1 + z$
2	$T_2 = 1 + z - z^2/2$



$p \backslash q$	0	1	2
0	1	$\frac{1}{1-z}$	$\frac{1}{1-z+3z^2/2}$
1	$1 + z$	$\frac{1+3z/2}{1+z/2}$	$\ldots$
2	$1 + z - z^2/2$	$\frac{1+5z/3+z^2/6}{1+3z/2}$	$\ldots$
3	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

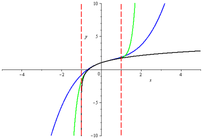
Séries de Taylor *vs* Padé

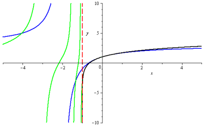
$$f(z) = 1 + \ln(1+z)$$

Taylor	Padé / Fractions continues
$f \simeq T$	$f \simeq P/Q$
$\simeq 1 + z + \cdots + \frac{(-1)^n}{n} z^n$	$\simeq 1 + z/(1 + \frac{1}{2} z/(\ldots + \frac{n}{4(n+1)} z/(1 + \frac{n+2}{4(n+1)} z)\,))$

p	T
0	$T_0 = 1$
1	$T_1 = 1 + z$
2	$T_2 = 1 + z - z^2/2$

$p \backslash q$	0	1	2
0	$f_0 = 1$	$\frac{1}{1-z}$	$\frac{1}{1-z+3z^2/2}$
1	$f_1 = 1 + z$	$f_2 = \frac{1+3z/2}{1+z/2}$	$\cdots$
2	$1 + z - z^2/2$	$f_3 = \frac{1+5z/3+z^2/6}{1+3z/2}$	$f_4 = \cdots$
3	$\ldots$	$\ldots$	$f_5 = \ldots$

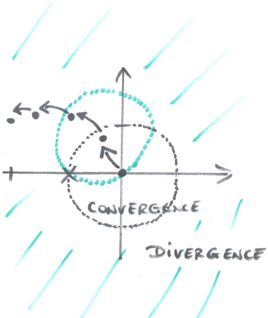


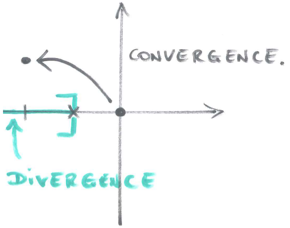


Séries de Taylor *vs* Padé

$$f(z) = 1 + \ln(1+z)$$
$$z := -3 + i$$

Taylor	Fractions continues
$f \simeq T$ $\simeq 1 + z + \cdots + \frac{(-1)^n}{n} z^n$	$f \simeq P/Q$ $\simeq 1 + z/(1 + \frac{1}{2}z/(\dots))$
disque de convergence ($\lvert z\rvert < 1$) prolongement analytique	convergence pour $1 + z \notin \mathbb{R}_-$





Références

- Historique :
  - 1776 : Lagrange, *Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral* ,
  - 1818 : Euler, *Commentatio in fractionem continuam, qua illustris La Grange potestates binomiales expressit*,
  - 1899 : Padé, *Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle, pouvant servir d'introduction à la théorie des fractions continues algébriques*.

Références

- Ouvrages de synthèse :
  - 1948 : Wall, *Analytic theory of continued fractions*,
  - 1963 : Khovanskii, *The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory*,
  - 1970 : Abramowitz and Stegun (et DLMF), *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and tables*,
  - 1980 : Jones and Thron, *Continued Fractions: Analytic Theory and Applications*,
  - 1992 : Lorentzen and Waadeland, *Continued Fractions with applications*,
  - 2008 : Cuyt *et alii*, *Handbook of Continued Fractions for Special Functions*.

Démonstration

Objets manipulés (1)

Définition (Série formelle tronquée)

$$\sum_{i=0}^{n} c_i z^i := c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n.$$

Définition (Valuation)

$\mathrm{val}(\sum a_i z^i) := \inf\{i;\ a_i \neq 0\}.$ $\mathrm{val}(z^3 + z^{12}) = 3.$

Proposition

$1/f$ est développable pour Taylor $\iff f(0) \neq 0 \iff \mathrm{val}(f) = 0.$

Définition (C-fraction tronquée)

$$c_0 + \mathop{\mathcal{K}}_{i=0}^{n} \frac{a_i z^{\alpha_i}}{1} := c_0 + \cfrac{a_0 z^{\alpha_0}}{1 + \cfrac{a_1 z^{\alpha_1}}{1 + \cfrac{\cdots}{1 + \cfrac{a_{n-1} z^{\alpha_{n-1}}}{1 + a_n z^{\alpha_n}}}}}$$

Objets manipulés (2)

Théorème

- *Toute C-fraction finie est une série*
- *Toute C-fraction infinie converge vers une série*
  (i.e. coeffs asymptotiquement constants)
- *Toute série de Taylor est une unique C-fraction.*

Remarque (Correspondance effective)

$$c_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{i=0}^{\infty} \frac{a_i x^{\alpha_i}}{1} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

$$\left(c_0, \begin{bmatrix} a_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_n \\ \alpha_n \end{bmatrix} \right) \leftrightsquigarrow (c_0, \ldots, c_{\alpha_0+\ldots+\alpha_n})$$

État de l'art

Preuves :

- Créatives $\exp(x) = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{x}{k}\right)^k$
- Indirectes $\forall n,\ a_n = \lim_{k\to\infty} a_{k,n}$
- Unifiées
  - Récurrence à trois termes : $u_n = u_{n+1} + a_n u_{n+2}$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{\left(\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}\right)} = 1 + \frac{a_n}{1 + \frac{a_{n+1}}{\left(\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}\right)}} = \cdots = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{i=n}^{\infty} \frac{a_i}{1}.$$

  - Hypergéométriques de Gauss :

$$2x \ln^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{\mathrm{F}\left(\begin{matrix}1/2, 0\\ 1/2\end{matrix}\ ;\ x^2\right)}{\mathrm{F}\left(\begin{matrix}1/2, 1\\ 3/2\end{matrix}\ ;\ x^2\right)} = 1 - \frac{x^2/3}{\left(\frac{\mathrm{F}\left(\begin{matrix}1/2, 1\\ 3/2\end{matrix}\ ;\ x^2\right)}{\mathrm{F}\left(\begin{matrix}3/2, 1\\ 5/2\end{matrix}\ ;\ x^2\right)}\right)} = \cdots$$

$$\mathbf{2x \ln^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{-n^2}{4n^2-1}\right) x^2}{1}}$$

État de l'art (calcul formel)

Tabulations de formules

- coquilles
  - Cuyt *et alii*, 2008, formule (11.4.8) pour arctan.
- non exhaustif : fonction d'Airy

$$\frac{\mathrm{Ai}'(z)}{\mathrm{Ai}(z)} = -\frac{1}{t} + \mathop{\mathrm{K}}_{i=0}^{\infty} \frac{a_n t^3}{1}, \quad z = 1/t^2, \quad \Re(t) > 0, \quad a_0 = \cdots, a_n = \cdots$$

État de l'art (calcul formel)

Tabulations de formules

- coquilles
  - Cuyt *et alii*, 2008, formule (11.4.8) pour arctan.
- non exhaustif : fonction d'Airy

$$\frac{\mathrm{Ai}'(z)}{\mathrm{Ai}(z)} = -\frac{1}{t} + \mathop{\mathrm{K}}_{i=0}^{\infty} \frac{a_n t^3}{1}, \qquad z = 1/t^2, \quad \Re(t) > 0, \quad a_0 = \cdots, a_n = \cdots$$

But : **produire** à la demande les formules, et leurs preuves.

État de l'art (calcul formel)

But : **produire** à la demande les formules, et leurs preuves.

Dynamical Dictionary of Mathematical Functions

`http://ddmf.msr-inria.inria.fr/`

The Special Function $\operatorname{erf}(x)$

3. Numerical Evaluation

$$\operatorname{erf}(1/4 + 1/4\,i) \approx 0.29339518 + 0.26991350\,i$$

(Below, `path` may be either a point z or a broken-line path $[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ along which to perform analytic continuation the defining differential equation. Each z_k should be of the form `x + y*i`.)

path = 1/4+1/4 precision = 8 Submit

4. Symmetry

The function $\operatorname{erf}(x)$ is odd:

$$\operatorname{erf}(x) = -\operatorname{erf}(-x)$$

for all complex numbers x.

See the Proof That the Function $\operatorname{erf}(x)$ is Odd.

Structures de données

$k = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q}(x)$.

Définition

$(a_n)_{n\geq 0}$ *P-récursive* $\quad \exists d,\ \forall n,\ p_0(n)u_{n+d} + \cdots + p_d(n)u_n = 0.$

$y(z)$ *D-finie* $\quad \exists e,\quad q_0(z)y^{(e)}(z) + \cdots + q_e(z)y(z) = 0.$

d est l'ordre de la P-récurrence, et les p_i et q_j sont polynomiaux.

Exemple

Fibonacci $\quad \rightsquigarrow \{\mathrm{Fib}_{n+2} = \mathrm{Fib}_{n+1} + \mathrm{Fib}_n, (\mathrm{Fib}_0, \mathrm{Fib}_1) = (0,1)\}.$

$\mathrm{erf}(z) \quad \rightsquigarrow \{y''(z) + 2zy'(z) = 0, (y, y')(0) = (0, \frac{2}{\sqrt{\pi}})\}.$

Théorème

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *D-finie* $\quad \Longleftrightarrow \quad (a_n)_{n\geq 0}$ *P-récursive.*

Structures de données

$k = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q}(x)$.

Définition

$(a_n)_{n\geq 0}$ *P-récursive* $\quad \exists d,\ \forall n,\ p_0(n)u_{n+d} + \cdots + p_d(n)u_n = 0.$

$y(z)$ *D-finie* $\quad \exists e,\quad q_0(z)y^{(e)}(z) + \cdots + q_e(z)y(z) = 0.$

d est l'ordre de la P-récurrence, et les p_i et q_j sont polynomiaux.

Exemple

Fibonacci $\quad \rightsquigarrow \{\mathrm{Fib}_{n+2} = \mathrm{Fib}_{n+1} + \mathrm{Fib}_n, (\mathrm{Fib}_0, \mathrm{Fib}_1) = (0,1)\}.$

$\mathrm{erf}(z) = \sum a_n z^n \quad \rightsquigarrow \{y''(z) + 2zy'(z) = 0, (y, y')(0) = (0, \frac{2}{\sqrt{\pi}})\}.$

$\rightsquigarrow \{2na_n + (n^2 + 3n + 2)a_{n+2} = 0, (a_0, a_1) = (0, \frac{2}{\sqrt{\pi}})\}\}.$

Théorème

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *D-finie* $\quad \overset{\text{par le calcul!}}{\Longleftrightarrow} \quad (a_n)_{n\geq 0}$ *P-récursive.*

Algorithmique

Théorème

Étant données des conditions initiales et des P-récurrences qui définissent $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ par récurrence, on peut :

- *Décider si* $\forall n,\ a_n = 0$*;*
- *Calculer une définition (similaire) pour :* $(a_{n+1})_{n\geq 0}\,,\ (a_n - b_n)_{n\geq 0}\,,\ (a_n b_n)_{n\geq 0}\,,\ \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right)_{n\geq 0}\ \ldots$

Exemple (Fib_n et $n!\,\mathrm{Fib}_{n+1}$)

À partir de $\{\mathrm{Fib}_{n+2} = \mathrm{Fib}_{n+1} + \mathrm{Fib}_n,\ \mathrm{Fib}_0 = 1,\ \mathrm{Fib}(1) = 1\}$
et $\{(n+1)! = (n+1)n!,\ 0! = 1\}$,
on peut calculer pour $g_n := n!\,\mathrm{Fib}_{n+1}$ *:*

$$\left\{g_{n+2} = \left(n^2 + 3\,n + 2\right) g_n + (n+2)\, g_{n+1}, g_0 = 1, g_1 = 2\right\}.$$

Réduction d'ordre

Théorème (Dimension de l'ensemble des solutions)

On a : $\forall n,\ p_0(n) \neq 0 \implies$

$$\dim\{(u_n)_{n\geq 0}, \quad p_0(n)u_{n+d} + \cdots + p_d(n)u_n = 0\} = d.$$

Problème (2^{-n} et 2^n sont dans un bateau...)

Si $\{2a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0, (a_0, a_1) = (1, \frac{1}{2})\}$, *montrer* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

- *deviner* une "petite" récurrence : $a_{n+1} + \alpha a_n = 0$? $(a_0, a_1) \rightsquigarrow \alpha = -\frac{1}{2}$. $\{2b_{n+1} - b_n = 0, b_0 = 1\}$
- Elle définit une *nouvelle suite* $(b_n)_{n\geq 0}$ par récurrence.
- *prouver* que $b_n = a_n$, par récurrence :
  - conditions initiales : $(b_0, b_1) = (a_0, a_1)$;
  - hérédité :

$$\forall n,\ 2b_{n+2} - 5b_{n+1} + 2b_n = (2b_{n+2} - b_{n+1}) - 2(2b_{n+1} - b_n) = 0.$$

Démarche : *deviner*

`diffeq2cfrac(`$\{\exp'(x) = \exp(x), \exp(0) = 1\}, x = 0$`);`

$$\exp(x) = 1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{\cdots}{1 + \cfrac{\frac{1}{2(2k+1)}x}{1 + \cfrac{\frac{-1}{2(2k+1)}x}{\cdots}}}}$$

- Calcul : $(a_0,\ldots,a_{19})=(1,\frac{-1}{2},\frac{1}{6},\frac{-1}{6},\ldots,\frac{1}{10},\frac{-1}{10},\ldots,\frac{1}{38},\frac{-1}{38})$.
- Devinette : $\{-n^2a_n+na_{n+1}+n(n+3)a_{n+2}=0, \quad (a_0,a_1,a_2)=(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{6})\}$.

Démarche : *deviner pour prouver!*

`diffeq2cfrac(`$\{\exp'(x)=\exp(x), \exp(0)=1\}, x=0$`);`

$$\exp(x) = 1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{\cdots}{1 + \cfrac{\frac{1}{2(2k+1)}x}{1 + \cfrac{\frac{-1}{2(2k+1)}x}{\cdots}}}}$$

- Calcul : $(a_0,\ldots,a_{19})=(1,\frac{-1}{2},\frac{1}{6},\frac{-1}{6},\ldots,\frac{1}{10},\frac{-1}{10},\ldots,\frac{1}{38},\frac{-1}{38})$.
- Devinette : $\{-n^2a_n+na_{n+1}+n(n+3)a_{n+2}=0, \quad (a_0,a_1,a_2)=(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{6})\}$.
- Preuve : $f_n := 1 + \mathcal{K}_{i=0}^{n} \frac{a_i x}{1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(x)$?

$\ldots$

Preuve (récurrences)

Notation

On note $f_n := 1 + \mathcal{K}_{i=0}^{n} \frac{a_i x}{1}$*, et* $P_n/Q_n := f_n$.

Proposition

On a $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp \iff \mathrm{val}(f_n' - f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Preuve (récurrences)

Notation

On note $f_n := 1 + \mathcal{K}_{i=0}^{n} \frac{a_i x}{1}$, *et* $P_n/Q_n := f_n$.

Proposition

On a $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp \iff \mathrm{val}(f_n' - f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Lemme

- $\forall n, \begin{cases} P_n = P_{n-1} + a_n x P_{n-2} \\ Q_n = Q_{n-1} + a_n x Q_{n-2} \end{cases}$ *où* $\begin{pmatrix} P_{-2} & P_{-1} \\ Q_{-2} & Q_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- $f_n' - f_n = H_n/Q_n^2$, *avec* $H_n := P_n' Q_n - Q_n^2 - P_n Q_n - P_n Q_n'$;
- $\forall n,\ \mathrm{val}(Q_n) = 0$.

Preuve (récurrences)

Notation

On note $f_n := 1 + \mathcal{K}_{i=0}^{n} \frac{a_i x}{1}$, *et* $P_n/Q_n := f_n$.

Proposition

On a $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp \iff \mathrm{val}(f_n' - f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Lemme

- $\forall n, \begin{cases} P_n = P_{n-1} + a_n x P_{n-2} \\ Q_n = Q_{n-1} + a_n x Q_{n-2} \end{cases}$ *où* $\begin{pmatrix} P_{-2} & P_{-1} \\ Q_{-2} & Q_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- $f_n' - f_n = H_n/Q_n^2$, *avec* $H_n := P_n' Q_n - Q_n^2 - P_n Q_n - P_n Q_n'$;
- $\forall n,\ \mathrm{val}(Q_n) = 0$.

Théorème

$1 + \mathcal{K}_{i=0}^{n} \frac{a_i x}{1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp \iff \mathrm{val}(H_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

Preuve (convergence)

À partir de $H_n := P_n' Q_n - Q_n^2 - P_n Q_n - P_n Q_n'$ et :

$$-n^2 a_n + n a_{n+1} + n(n+3) a_{n+2} = 0 \qquad (a_0, a_1, a_2) = (1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{6})$$

$$\begin{aligned} &P_n = P_{n-1} + a_n x P_{n-2} & (P_{-2}, P_{-1}) = (1, 0) \\ &\hookrightarrow P_n' = P_{n-1}' + \cdots P_{n-2}' + \cdots P_{n-2} & \\ &Q_n = Q_{n-1} + a_n x Q_{n-2} & (Q_{-2}, Q_{-1}) = (0, 1) \\ &\hookrightarrow Q_n' = Q_{n-1}' + \cdots Q_{n-2}' + \cdots Q_{n-2} & \end{aligned}$$

On peut développer :

$$\begin{aligned} H_n &= P_n' Q_n - Q_n^2 - P_n Q_n - P_n Q_n', \\ H_{n+1} &= P_{n+1}' Q_{n+1} - Q_{n+1}^2 - P_{n+1} Q_{n+1} - P_{n+1} Q_{n+1}', \\ H_{n+2} &= -a_{n+2}^2 x^2 P_n Q_n + \cdots P_{n+1} Q_{n+1} + \cdots P_n Q_{n+1}' + \cdots, \\ &\cdots \\ H_{n+k} &= \sum_{\sigma, \delta \in \{0,1\}^2} c_{k,\sigma,\delta} \; P_{n+\sigma_1}^{(\delta_1)} Q_{n+\sigma_2}^{(\delta_2)}. \end{aligned}$$

(8 générateurs sur $\mathbb{Q}(x, a_n, \ldots, a_{n+4})$)

Par coefficients indéterminés (algèbre linéaire), on calcule :

$$H_{n+4} = H_{n+3} + \cdots H_{n+2} + (a_{n+4} a_{n+3}) x^2 H_{n+1} + \cdots H_n.$$

Théorème

$1 + \mathcal{K}_{i=0}^{n} \frac{a_i x}{1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp \iff \mathrm{val}(H_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$?

Preuve (convergence)

À partir de :

$$H_{n+4} = H_{n+3} + \cdots H_{n+2} + (a_{n+4}a_{n+3})x^2 H_{n+1} + \cdots H_n \qquad (H_0, H_1, H_2, H_3) = \ldots$$

$$-n^2 a_n + n a_{n+1} + n(n+3)a_{n+2} = 0 \qquad (a_0, a_1, a_2) = (1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{6})$$

Montrons $\mathrm{val}(H_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

- Devinette sur $(H_0, \ldots, H_{29})$: $\rightsquigarrow h_{n+2} = -\frac{\left(2\,n^2+13\,n+21\right)x^2\,h_n+(2\,n+4)x\,h_{n+1}}{8n^4+84n^3+328n^2+564n+360}$ $(h_0, h_1) = (-x, x^2/4)$;

Théorème

$1 + \mathcal{K}_{i=0}^{n} \frac{a_i x}{1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp \iff \mathrm{val}(H_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$?

Preuve (convergence)

À partir de :

$$H_{n+4} = H_{n+3} + \cdots H_{n+2} + (a_{n+4}a_{n+3})x^2 H_{n+1} + \cdots H_n \qquad (H_0, H_1, H_2, H_3) = \ldots$$

$$-n^2 a_n + n a_{n+1} + n(n+3)a_{n+2} = 0 \qquad (a_0, a_1, a_2) = (1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{6})$$

Montrons $\mathrm{val}(H_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

- Devinette sur $(H_0, \ldots, H_{29})$: $\rightsquigarrow h_{n+2} = -\frac{\left(2\,n^2+13\,n+21\right)\boxed{x^2}\,h_n+(2\,n+4)\boxed{x}\,h_{n+1}}{8n^4+84n^3+328n^2+564n+360}$ $(h_0, h_1) = (-x, x^2/4)$;

Théorème

$1 + \mathcal{K}_{i=0}^{n} \frac{a_i x}{1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp \iff \mathrm{val}(H_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \boxed{\iff} H_n = h_n$?

Preuve (convergence)

À partir de :

$$H_{n+4} = H_{n+3} + \cdots H_{n+2} + (a_{n+4} a_{n+3}) x^2 H_{n+1} + \cdots H_n \qquad (H_0, H_1, H_2, H_3) = \ldots$$

$$-n^2 a_n + n a_{n+1} + n(n+3) a_{n+2} = 0 \qquad (a_0, a_1, a_2) = (1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{6})$$

Montrons $\operatorname{val}(H_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

- Devinette sur $(H_0, \ldots, H_{29})$: $\rightsquigarrow$ $h_{n+2} = -\frac{\left(2\,n^2+13\,n+21\right)x^2\,h_n+(2\,n+4)x\,h_{n+1}}{8n^4+84n^3+328n^2+564n+360}$ $(h_0, h_1) = (-x, x^2/4)$;
- Preuve (conditions initiales) : $(h_0, \ldots, h_3) = (H_0, \ldots, H_3)$
- Preuve (hérédité) : h_n vérifie la récurrence pour H_n?

$$z_n := -h_{n+4} + h_{n+3} + \cdots h_{n+2} + (a_{n+4} a_{n+3}) x^2 h_{n+1} + \cdots h_n \qquad = 0 \text{ ?}$$

Théorème

$1 + \mathcal{K}_{i=0}^{n} \frac{a_i x}{1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp \iff \operatorname{val}(H_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \iff H_n = h_n \text{ ?}$

Preuve (convergence)

À partir de :

$$H_{n+4} = H_{n+3} + \cdots H_{n+2} + (a_{n+4} a_{n+3}) x^2 H_{n+1} + \cdots H_n \qquad (H_0, H_1, H_2, H_3) = \ldots$$

$$-n^2 a_n + n a_{n+1} + n(n+3) a_{n+2} = 0 \qquad (a_0, a_1, a_2) = (1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{6})$$

Montrons $\mathrm{val}(H_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$.

- Devinette sur $(H_0, \ldots, H_{29})$: $\rightsquigarrow h_{n+2} = -\frac{\left(2\, n^2 + 13\, n + 21\right) x^2\, h_n + (2\, n + 4) x\, h_{n+1}}{8n^4 + 84n^3 + 328n^2 + 564n + 360}$ $(h_0, h_1) = (-x, x^2/4)$;
- Preuve (conditions initiales) : $(h_0, \ldots, h_3) = (H_0, \ldots, H_3)$
- Preuve (hérédité) : h_n vérifie la récurrence pour H_n? Oui!

$$z_n := \underbrace{-\underbrace{h_{n+4}}_{\text{rec}} + \underbrace{h_{n+3}}_{\text{rec}} + \cdots \underbrace{h_{n+2}}_{\text{rec}} + \underbrace{(\underbrace{a_{n+4}}_{\text{rec}}\ \underbrace{a_{n+3}}_{\text{rec}}) x^2\ \underbrace{h_{n+1}}_{\text{rec}}}_{\text{rec grosse}} + \cdots \underbrace{h_n}_{\text{rec}}}_{\text{récurrence énorme } (>10\ \mathrm{min})} = 0?.$$

Théorème

$1 + \mathcal{K}_{i=0}^{n} \frac{a_i x}{1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \exp \iff \mathrm{val}(H_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty \iff H_n = h_n$ ✔ □

Preuve (convergence)

À partir de :

$$H_{n+4} = H_{n+3} + \cdots H_{n+2} + (a_{n+4}a_{n+3})x^2 H_{n+1} + \cdots H_n \qquad (H_0, H_1, H_2, H_3) = \ldots$$

$$-n^2 a_n + na_{n+1} + n(n+3)a_{n+2} = 0 \qquad (a_0, a_1, a_2) = (1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{6})$$

Montrons $\mathrm{val}(H_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

- Devinette sur $(H_0, \ldots, H_{29})$: $\rightsquigarrow h_{n+2} = -\frac{\left(2\,n^2+13\,n+21\right)x^2\,h_n+(2\,n+4)x\,h_{n+1}}{8n^4+84n^3+328n^2+564n+360}$ $(h_0, h_1) = (-x, x^2/4)$;
- Preuve (conditions initiales) : $(h_0, \ldots, h_3) = (H_0, \ldots, H_3)$
- Preuve (hérédité) : h_n vérifie la récurrence pour H_n? Oui! (et rapidement, avec réduction d'ordre systématique).

$$z_n := \underbrace{-\underbrace{h_{n+4}}_{\text{rec}} + \underbrace{h_{n+3}}_{\text{rec}} + \cdots \underbrace{h_{n+2}}_{\text{rec}} + \underbrace{(\underbrace{a_{n+4}}_{\text{rec}}\ \underbrace{a_{n+3}}_{\text{rec}})x^2\ \underbrace{h_{n+1}}_{\text{rec}}}_{\text{rec grosse moyenne}} + \cdots \underbrace{h_n}_{\text{rec}}}_{\text{récurrence énorme } (>10\text{ min}) \text{ raisonnable } (<3\text{ s})} = 0?.$$

Théorème

$1 + \mathop{\mathcal{K}}_{i=0}^{n} \frac{a_i x}{1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp \iff \mathrm{val}(H_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \iff H_n = h_n$ ✔ □

Démonstration (2)

Conclusion

- Des formules connues, (parfois d'Euler, Lagrange et Gauss)
- obtenues et prouvées par des calculs,
  - totalement automatiques,
  - et directs (vérification),

Conclusion

- Des formules connues, (parfois d'Euler, Lagrange et Gauss)
- obtenues et prouvées par des calculs,
  - totalement automatiques,
  - et directs (vérification),
- réactifs, (pour le DDMF)
- qui couvrent de nombreux cas.
  $\exp(x)$, $\ln(1+x)$, $\arctan(x)$, $\tan(x)$, fonctions de Bessel $J_\nu(x)$, d'Airy $\mathrm{Ai}(x)$, d'erreur $\mathrm{erf}(x)$.

Conclusion

- Des formules connues, (parfois d'Euler, Lagrange et Gauss)
- obtenues et prouvées par des calculs,
  - totalement automatiques,
  - et directs (vérification),
- réactifs, (pour le DDMF)
- qui couvrent de nombreux cas.
  $\exp(x)$, $\ln(1+x)$, $\arctan(x)$, $\tan(x)$, fonctions de Bessel $J_\nu(x)$, d'Airy $\mathrm{Ai}(x)$, d'erreur $\mathrm{erf}(x)$.
- Perspectives :
  - élargir la classe des formules capturées? (impossible?)
  - étudier automatiquement la convergence numérique; (domaine, vitesse)
  - produire des procédures d'évaluation certifiées;
  - et étudier leur complexité.

Conclusion

- Des formules connues, (parfois d'Euler, Lagrange et Gauss)
- obtenues et prouvées par des calculs,
  - totalement automatiques,
  - et directs (vérification),
- réactifs, (pour le DDMF)
- qui couvrent de nombreux cas.
  $\exp(x)$, $\ln(1+x)$, $\arctan(x)$, $\tan(x)$, fonctions de Bessel $J_\nu(x)$, d'Airy $\mathrm{Ai}(x)$, d'erreur $\mathrm{erf}(x)$.
- Perspectives :
  - élargir la classe des formules capturées? (impossible?)
  - étudier automatiquement la convergence numérique; (domaine, vitesse)
  - produire des procédures d'évaluation certifiées;
  - et étudier leur complexité.

Merci!