Calculs effectifs de fonctions symétriques différentiellement finies

Frédéric Chyzak

Collaboration avec Marni Mishna et Bruno Salvy

frederic.chyzak@inria.fr
http ://algo.inria.fr/chyzak/

Combinatoire symétrique D-finie (Gessel)

Graphes k-réguliers :

$$R_k(t) = \left\langle \left(\exp \sum_{i \geq 1} \frac{p_i}{i} \right) [e_2], \exp(h_k t) \right\rangle.$$

Tableaux de Young k-réguliers et involutions généralisées :

$$Y_k(t) = \left\langle \left(\exp \sum_{i \geq 1} \frac{p_i}{i} \right) [e_1 + e_2], \frac{1}{1 - h_k t} \right\rangle.$$

Tableaux de Young de hauteur au plus k, ...

Fonctions symétriques D-finies en une infinité de variables

$\longrightarrow$ séries génératrices D-finies en t.

→ I. UN ALGORITHME POUR LE PRODUIT SCALAIRE

II. APPLICATION AUX FONCTIONS SYMÉTRIQUES

Algèbres de Weyl

$$A_p = \mathbb{C}\langle p_1, \ldots, p_n, \partial_1, \ldots, \partial_n; \mathcal{R}_p \rangle, \qquad \partial_i = d/dp_i,$$

$$\mathcal{R}_p : \partial_i p_j = p_j \partial_i + \delta_{i,j}, \quad p_i p_j - p_j p_i = \partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i = 0.$$

$$A_{p,t} = \mathbb{C}\langle p_1, \ldots, p_n, t, \partial_1, \ldots, \partial_n, \partial_t; \mathcal{R}_{p,t} \rangle, \qquad \partial_t = d/dt.$$

$$\mathcal{R}_{p,t} : \mathcal{R}_p, \quad \partial_t t = t\partial_t + 1, \quad tp_i - p_i t = t\partial_i - \partial_i t = \partial_t p_i - p_i \partial_t = 0.$$

Opérateurs différentiels linéaires à coefficients polynomiaux

$$I_\phi := \operatorname{ann}_{A_{p,t}} \phi = \{L \in A_{p,t} \mid L\phi = 0\} \qquad \text{(idéal à gauche).}$$

$$A_{p,t}\phi = \{L\phi \mid L \in A_{p,t}\} \simeq A_{p,t}/I_\phi \qquad \text{(module à gauche).}$$

Adjonctions

Adjoint en général : pour P et Q dans A_p,

$$\langle P\phi, \psi\rangle = \langle \phi, P^*\psi\rangle, \qquad P^{**} = P, \qquad (PQ)^* = Q^*P^*.$$

Adjoint pour le produit scalaire usuel $(f, g) \mapsto \int fg$:

$$\langle \partial_i\phi, \psi\rangle = -\langle \phi, \partial_i\psi\rangle \quad \Longrightarrow \quad p_i^* = p_i \quad \text{et} \quad \partial_i^* = -\partial_i$$

(intégration par parties).

Adjoint dans le cadre symétrique :

$$\langle p_i\phi, \psi\rangle = \langle \phi, i\partial_i\psi\rangle \quad \Longrightarrow \quad p_i^* = i\partial_i \quad \text{et} \quad \partial_i^* = i^{-1}p_i.$$

Produit scalaire effectif : cadre du calcul

Observation : pour tout $S \in A_p$, $T \in A_p$, $P \in I_\phi \cap A_p$ et $Q \in I_\psi$,

$$\big\langle \phi, (P^* S + TQ)\psi \big\rangle = \langle S^* P\phi, \psi\rangle + \langle \phi, TQ\psi\rangle = 0.$$

$$\partial_t \langle \phi, \psi\rangle = \langle \partial_t \phi, \psi\rangle + \langle \phi, \partial_t \psi\rangle, \qquad t\langle \phi, \psi\rangle = \langle t\phi, \psi\rangle = \langle \phi, t\psi\rangle.$$

Domaine de calcul :

$$\big(A_{p,t}/I_\phi^*\big) \otimes_{A_p[t]} (A_{p,t}/I_\psi) \simeq (A_{p,t}\phi)^* \otimes_{A_p[t]} (A_{p,t}\psi) \twoheadrightarrow \langle A_{p,t}\phi, A_{p,t}\psi\rangle.$$

$$(P\phi)^* \otimes \psi = (\phi^* P^*) \otimes \psi = \phi^* \otimes (P^*\psi)\,.$$

Idée du calcul :

1. construire itérativement des troncatures de $(I_\phi)^*$ et de I_ψ ;
2. à chaque étape, chercher une recombinaison dans A_t.

Produit scalaire effectif : algorithme

Entrées :

- ϕ D-finie dans $\mathbb{C}[[p_1, \ldots, p_n]]$, **(hypothèse simplificatrice)**
- ψ D-finie dans $\mathbb{C}[[t, p_1, \ldots, p_n]]$.

Algorithme :

1. calculer des bases de Gröbner $(\mathcal{G}_\phi)^*$ pour $(\operatorname{ann} \phi)^*$ et $\mathcal{G}_\psi$ pour $(\operatorname{ann} \psi)$ selon un même ordre (annulateurs relatifs à $\mathbb{C}(t) \otimes A_{p,t}$) ;
2. faire $B = \{\}$;
3. itérer sur les monômes α de $[p_1, \ldots, p_n, \partial_1, \ldots, \partial_n, \partial_t]$ dans l'ordre croissant ;
   (a) noter α_ϕ le reste de la division à gauche de α par $(\mathcal{G}_\phi)^*$;
   (b) noter α_ψ le reste de la division à droite de α par $\mathcal{G}_\psi$;
   (c) mettre $\alpha - \alpha_\phi$ et $\alpha - \alpha_\psi$ dans B et réduire pour éliminer les p_i et les ∂_i par de l'algèbre linéaire ;
   (d) si B contient un élément P en t et ∂_t seulement, stopper et le renvoyer.

Filtration par le degré total

$$F_d = \{\, P \in A_p \mid \deg P \leq d \,\}.$$

$$F_d F_{d'} \subset F_{d+d'}, \qquad F_d \subset F_{d+1}, \qquad \bigcup_{d \geq 0} F_d = A_p.$$

Holonomie

Le module $A_p\phi$ est dit holonome quand $\dim_{\mathbb{C}} F_d\phi = O\left(d^n\right)$.
ϕ est dite holonome si $A_p\phi$ est holonome.

Théorème : ϕ est holonome si et seulement si ϕ est D-finie.
(Kashiwara, Takayama)

Preuve de l'algorithme

Correction :

1. $S = (A_{p,t}\phi)^* \otimes_{A_p[t]} (A_{p,t}\psi) \simeq \left(A^*_{p,t} \otimes_{A_p[t]} A_{p,t}\right)/K$ pour $K = \left(I^*_\phi \otimes_{A_p[t]} A_{p,t} + A_{p,t} \otimes_{A_p[t]} I_\psi\right) = \mathrm{ann}_{A^*_{p,t}\otimes_{A_p[t]}A_{p,t}}(\phi^* \otimes \psi)$.
2. L'algorithme construit progressivement une base vectorielle de K et renvoie $K \cup \mathbb{C}\langle t, \partial_t \otimes 1 + 1 \otimes \partial_t\rangle$ lorsque celui-ci est non trivial.

Terminaison :

1. S est holonome dès que ϕ et ψ sont holonomes, car
$$\int \iota^*\left((A_{p,t}\phi)^* \otimes_{\mathbb{C}} (A_{p,t}\psi)\right) \twoheadrightarrow S.$$
2. Donc $K \cup \mathbb{C}\langle t, \partial_t \otimes 1 + 1 \otimes \partial_t\rangle$ ne se réduit pas à $\{0\}$.
3. Tout élément de K est atteint un jour.

Passage du cas symétrique au cas classique

Trois morphismes préservant l'holonomie :

1. dilatation $\phi \mapsto \phi(p_1, 2p_2, \ldots, np_n)$: $\tau : (p_i, \partial_i) \mapsto (ip_i, i^{-1}\partial_i)$
2. transformée de Laplace formelle $\phi \mapsto \int e^{-pq}\phi(p)\,dq$:
$\mathcal{F} : (p_i, \partial_i) \mapsto (-\partial_i, p_i)$
3. adjoint usuel : $(p_i, \partial_i) \mapsto (p_i, -\partial_i)$

adjonction symétrique $=$ adjonction classique $\circ\, \mathcal{F} \circ \tau$

$$(p_i, \partial_i) \mapsto (i\partial_i, i^{-1}p_i).$$

Extensions à étudier

(Suggestion d'**Alban Quadrat** lors de ces journées.)

Convolution additive :

$$[f,g](t) := \int f(x)g(t-x)\,dx.$$

$$[\partial f, g] = [f, \partial g], \qquad \big[xf, g\big] = \big[f, (t-x)g\big].$$

Convolution multiplicative :

$$[f,g](t) := \int f(x)g(tx)\,dx.$$

$$[\partial f, g] = [f, -t\partial g], \qquad \left[xf, g\right] = \left[f, \frac{x}{t}g\right].$$

I. UN ALGORITHME POUR LE PRODUIT SCALAIRE

→ II. APPLICATION AUX FONCTIONS SYMÉTRIQUES

Fonctions symétriques

Fonction symétrique = série formelle en une infinité de variables,

$$\phi = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots<\infty} c_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots \in \mathbb{Q}[[x_1, x_2, \ldots]],$$

avec invariance par l'action des permutations σ de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\phi\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots\right) = \phi\left(x_1, x_2, \ldots\right), \qquad c_{\alpha_{\sigma(1)},\alpha_{\sigma(2)},\ldots} = c_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}.$$

Pour $p_i = \sum_{i\geq 1} x^i$, on pose : $\Lambda = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ et $\hat{\Lambda} = \mathbb{Q}[[p_1, p_2, \ldots]]$

avec indépendance algébrique sur $\mathbb{Z}$.

Fonctions symétriques D-finies

ϕ est une fonction symétrique D-finie dans $\mathbb{Q}[[p_1, p_2, \ldots]]$

$\Updownarrow$ (déf., Gessel)

pour chaque $r \in \mathbb{N}$, la spécialisation $\phi(p_1, \ldots, p_r, 0, 0, \ldots)$ est D-finie dans $\mathbb{Q}[[p_1, \ldots, p_r]]$

Exemples : $\prod_{i \geq 1} (1 + x_i)$, $\prod_{1 \leq i < j} (1 + x_i x_j)$.

Partitions (d'entiers)

Partition λ de l'entier n en k parts : $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{N}^k$ avec

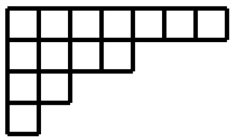
$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = n.$$

Autre notation : si r_i est le nombre de répétitions de la part i,

$$\lambda = \langle 1^{r_1} 2^{r_2} \cdots \rangle \qquad \text{et} \qquad \sum_i i r_i = n.$$

Notation :

$$\lambda \vdash n, \qquad |\lambda| = k, \qquad z_\lambda = (1^{r_1} r_1!)(2^{r_2} r_2!) \cdots .$$

$\lambda = (7, 4, 2, 1) = \langle 1247 \rangle =$  $\leftrightarrow \lambda' = (4, 3, 2, 2, 1, 1, 1) = \langle 1^3 2^2 34 \rangle.$

Produit scalaire

En posant $p_\lambda = p_{\lambda_1} \ldots p_{\lambda_k}$, on observe

$$\Lambda = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots] = \bigoplus_{n \geq 0} \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{Q}\, p_\lambda .$$

De même pour d'autres bases classiques : $\{m_\lambda\}$, $\{e_\lambda\}$, $\{h_\lambda\}$, $\{s_\lambda\}$.

On définit un produit scalaire sur $\hat{\Lambda}$ par :

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = z_\lambda \delta_{\lambda,\mu}.$$

Permet l'extraction des coefficients $c_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}$.

Propriétés de clôture des séries symétriques D-finies (Gessel)

1. Clôture par $+$, $\times$, ∂_i.
2. Clôture par substitution rationnelle (sous conditions).
3. D-finitude des exponentielles de polynômes.
4. Clôture par produit interne (multiplication donnée par $p_\lambda * p_\mu = \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda p_\lambda$).
5. Clôture par produit scalaire (sous conditions) :

   Pour ϕ et ψ D-finies dans $\hat{\Lambda}[[t]]$, si ψ ne fait intervenir qu'un nombre fini de p_i, alors $\langle \phi, \psi \rangle$ est D-finie en t.

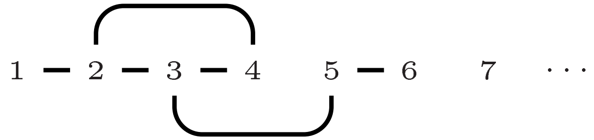
6. Clôture par pléthysme (substitution symétrique satisfaisant à $p_n[p_m] = p_{nm}$, sous conditions).

Graphes k-réguliers

G = classe des graphes simples étiquetés à nombre finis d'arêtes.

Marquage par degrés des sommets $\to$ série génératrice $\phi_G = \sum_{g \in G} w(g)$,

avec $\qquad w$: graphe $g \quad \mapsto \quad$ monôme



$\mapsto \quad x_1 x_2^3 x_3^2 x_4^2 x_5^2 x_6$

Graphe k-régulier = tous ses sommets ont même degré.

$r_{n,k}$ = coefficient de $x_1^k \dots x_n^k$ dans ϕ_G =

nombre de graphes k-réguliers sur $\{1, \dots, n\}$.

Séries génératrices des graphes k-réguliers

$$R_k(t) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{n\geq 0} r_{n,k}\frac{t^n}{n!} = \sum_{k\geq 0}\langle \phi_G, h_{\langle k^n\rangle}\rangle \frac{t^n}{n!} = \langle \phi_G, \exp(h_k t)\rangle$$

$$\phi_G = \sum_{g\in G}\prod_{\{i,j\}} x_i x_j = \prod_{i<j}(1+x_ix_j) = \left(\exp \sum_{i\geq 1}\frac{p_i}{i}\right)[e_2]$$

$$\Downarrow$$

$$R_k(t) = \left\langle \exp\left(\sum_{\substack{i\leq k\\ i \text{ pair}}}(-1)^{i/2}\frac{p_i^2}{2i} + \frac{p_i}{i} + \sum_{\substack{i\leq k\\ i \text{ impair}}}\frac{p_i^2}{2i}\right), \exp\left(t\sum_{\lambda\vdash k}\frac{p_\lambda}{z_\lambda}\right)\right\rangle$$

$R_k(t)$ suit une équation différentielle linéaire !

Valeurs connues (Goulden, Jackson et Reilly)

$$2(1-t)R_2'(t) - t^2 R(t) = 0,$$
$$R_2(t) = 1 + t^3 + 3t^4 + 12t^5 + 70t^6 + 465t^7 + 3507t^8 + 30016t^9 + \cdots$$

$$\begin{aligned}&9t^3(t^4+2t^2-2)R_3''(t)\\ &\quad + 3(t^{10}+6t^8+3t^6-6t^4-26t^2+8)R_3'(t)\\ &\quad - t^3(t^4+2t^2-2)^2 R_3(t) = 0,\end{aligned}$$
$$R_3(t) = 1 + 2t^2 + 47t^4 + 4720t^6 + 1256395t^8 + 699971370t^{10} + \cdots$$

$$\begin{aligned}&16t^2(t-1)^2(t^5+2t^4+2t^2+8t-4)(t+2)^3 R_4''(t)\\ &-4(t^{13}+4t^{12}-16t^{10}-10t^9-36t^8-220t^7-348t^6-48t^5+200t^4-336t^3-240t^2+416t-96)R_4'(t)\\ &\quad - t^4(t^5+2t^4+2t^2+8t-4)^2 R_4(t) = 0,\end{aligned}$$
$$R_4(t) = 1 + t^5 + 15t^6 + 465t^7 + 19355t^8 + 1024380t^9 + 66462606t^{10} + \cdots$$

Équations différentielles retrouvées par notre algorithme.