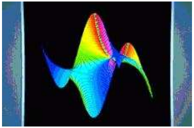
Algorithmique symbolique pour les fonctions spéciales

Frédéric Chyzak

sur des travaux de et/ou en commun avec
A. Bostan, A. Benoit, A. Darrasse, S. Gerhold, M. Kauers, M. Mezzarobba, B. Salvy, . . .

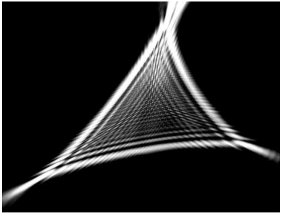
Équipe-projet Algorithms, INRIA



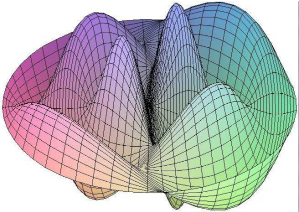
Financé en partie par le Microsoft Research INRIA Joint Centre

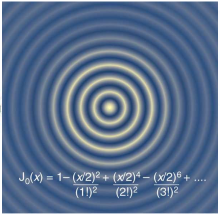
Le 10 mai 2010, Journées « Algorithmique et programmation 2010 », Luminy

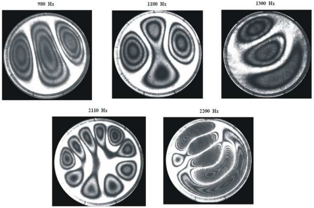
Les fonctions spéciales : les origines en physique

Airy =  

Bessel =







Les fonctions spéciales : une théorie propre

Une branche de l'analyse :

1. Whittaker et Watson, *A Course of Modern Analysis*, (1902, 1915, 19 ? ?, 1927)
2. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, (1922) : asymptotique
3. Erdélyi (éd.), *Bateman Manuscript Project*, (1953, 1953, 1955) : traité encyclopédique
4. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, (1974)
5. Andrews, Askey et Roy, *Special Functions*, (1999)

Des formulaires utilisés :

1. Abramowitz & Stegun (éd.), *Handbook of Mathematical Functions*, (1964)
2. Prudnikov, Brychkov & Marichev, *Integrals and Series*, en particulier les volumes I à III, (1986, 1989, 1990)

Pages choisies (A&S, 1/2)

9. Bessel Functions of Integer Order

Mathematical Properties

Notation

The tables in this chapter are for Bessel functions of integer order; the text treats general orders. The conventions used are:

$z=x+iy$; x, y real.

n is a positive integer or zero.

ν, μ are unrestricted except where otherwise indicated; ν is supposed real in the sections devoted to Kelvin functions **9.9**, **9.10**, and **9.11**.

The notation used for the Bessel functions is that of Watson [9.15] and the British Association and Royal Society Mathematical Tables. The function $Y_\nu(z)$ is often denoted $N_\nu(z)$ by physicists and European workers.

Other notations are those of:

Aldis, Airey:

$$G_n(z) \text{ for } -\tfrac{1}{2}\pi Y_n(z), K_n(z) \text{ for } (-)^n K_n(z).$$

Clifford:

$$C_n(x) \text{ for } x^{-\frac{1}{2}n}J_n(2\sqrt{x}).$$

Gray, Mathews and MacRobert [9.9]:

$$Y_n(z) \text{ for } \tfrac{1}{2}\pi Y_n(z)+(\ln 2-\gamma)J_n(z),$$

$$\overline{Y}_\nu(z) \text{ for } \pi e^{\nu\pi i}\sec(\nu\pi)Y_\nu(z),$$

$$G_\nu(z) \text{ for } \tfrac{1}{2}\pi i H_\nu^{(1)}(z).$$

Jahnke, Emde and Lösch [9.32]:

$$\Lambda_\nu(z) \text{ for } \Gamma(\nu+1)(\tfrac{1}{2}z)^{-\nu}J_\nu(z).$$

Jeffreys:

$$Hs_\nu(z) \text{ for } H_\nu^{(1)}(z),\ Hi_\nu(z) \text{ for } H_\nu^{(2)}(z),$$

$$Kh_\nu(z) \text{ for } (2/\pi)K_\nu(z).$$

Heine:

$$K_n(z) \text{ for} -\tfrac{1}{2}\pi Y_n(z).$$

Neumann:

$$Y^n(z) \text{ for } \tfrac{1}{2}\pi Y_n(z)+(\ln 2-\gamma)J_n(z).$$

Whittaker and Watson [9.18]:

$$K_\nu(z) \text{ for } \cos(\nu\pi)K_\nu(z).$$

Bessel Functions J and Y

9.1. Definitions and Elementary Properties

Differential Equation

9.1.1 $$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}+(z^2-\nu^2)w=0$$

Solutions are the Bessel functions of the first kind $J_{\pm\nu}(z)$, of the second kind $Y_\nu(z)$ (also called Weber's function) and of the third kind $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ (also called the Hankel functions). Each is a regular (holomorphic) function of z throughout the z-plane cut along the negative real axis, and for fixed $z(\neq 0)$ each is an entire (integral) function of ν. When $\nu=\pm n$, $J_\nu(z)$ has no branch point and is an entire (integral) function of z.

Important features of the various solutions are as follows: $J_\nu(z)(\mathscr{R}\nu\geq 0)$ is bounded as $z\to 0$ in any bounded range of arg z. $J_\nu(z)$ and $J_{-\nu}(z)$ are linearly independent except when ν is an integer. $J_\nu(z)$ and $Y_\nu(z)$ are linearly independent for all values of ν.

$H_\nu^{(1)}(z)$ tends to zero as $|z|\to\infty$ in the sector $0<\arg z<\pi$; $H_\nu^{(2)}(z)$ tends to zero as $|z|\to\infty$ in the sector $-\pi<\arg z<0$. For all values of ν, $H_\nu^{(1)}(z)$ and $H_\nu^{(2)}(z)$ are linearly independent.

Relations Between Solutions

9.1.2 $$Y_\nu(z)=\frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}$$

The right of this equation is replaced by its limiting value if ν is an integer or zero.

9.1.3

$$H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+iY_\nu(z)$$
$$=i\csc(\nu\pi)\{e^{-\nu\pi i}J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)\}$$

9.1.4

$$H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-iY_\nu(z)$$
$$=i\csc(\nu\pi)\{J_{-\nu}(z)-e^{\nu\pi i}J_\nu(z)\}$$

9.1.5 $J_{-n}(z)=(-)^nJ_n(z)$ $\quad$ $Y_{-n}(z)=(-)^nY_n(z)$

9.1.6 $H_{-\nu}^{(1)}(z)=e^{\nu\pi i}H_\nu^{(1)}(z)$ $\quad$ $H_{-\nu}^{(2)}(z)=e^{-\nu\pi i}H_\nu^{(2)}(z)$

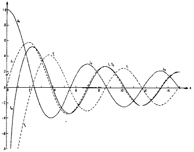


FIGURE 9.1. $J_0(x)$, $Y_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_1(x)$.

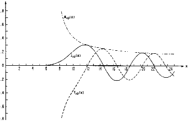


FIGURE 9.2. $J_{10}(x)$, $Y_{10}(x)$, *and* $M_{10}(x)=\sqrt{J_{10}^2(x)+Y_{10}^2(x)}$.

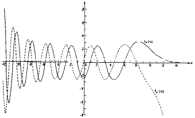


FIGURE 9.3. $J_\nu(10)$ *and* $Y_\nu(10)$.

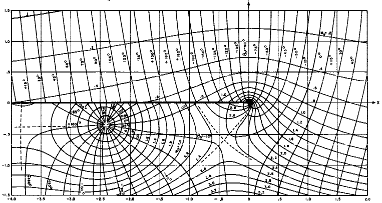


FIGURE 9.4. *Contour lines of the modulus and phase of the Hankel Function* $H_0^{(1)}(x+iy)=M_0e^{i\theta_0}$. From E. Jahnke, F. Emde, and F. Lösch, Tables of higher functions, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y., 1960 (with permission).

Pages choisies (A&S, 2/2)

Limiting Forms for Small Arguments

When ν is fixed and $z\to 0$

9.1.7

$$J_\nu(z)\sim(\tfrac12 z)^\nu/\Gamma(\nu+1)\qquad(\nu\neq-1,-2,-3,\ldots)$$

9.1.8 $$Y_0(z)\sim-iH_0^{(1)}(z)\sim iH_0^{(2)}(z)\sim(2/\pi)\ln z$$

9.1.9

$$Y_\nu(z)\sim-iH_\nu^{(1)}(z)\sim iH_\nu^{(2)}(z)\sim-(1/\pi)\Gamma(\nu)(\tfrac12 z)^{-\nu}\qquad(\mathscr{R}\nu>0)$$

Ascending Series

9.1.10 $$J_\nu(z)=(\tfrac12 z)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\tfrac14 z^2)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

9.1.11

$$Y_n(z)=-\frac{(\tfrac12 z)^{-n}}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}(\tfrac14 z^2)^k+\frac{2}{\pi}\ln(\tfrac12 z)J_n(z)-\frac{(\tfrac12 z)^n}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\{\psi(k+1)+\psi(n+k+1)\}\frac{(-\tfrac14 z^2)^k}{k!(n+k)!}$$

where $\psi(n)$ is given by **6.3.2.**

9.1.12 $$J_0(z)=1-\frac{\tfrac14 z^2}{(1!)^2}+\frac{(\tfrac14 z^2)^2}{(2!)^2}-\frac{(\tfrac14 z^2)^3}{(3!)^2}+\ldots$$

9.1.13

$$Y_0(z)=\frac{2}{\pi}\{\ln(\tfrac12 z)+\gamma\}J_0(z)+\frac{2}{\pi}\Big\{\frac{\tfrac14 z^2}{(1!)^2}-(1+\tfrac12)\frac{(\tfrac14 z^2)^2}{(2!)^2}+(1+\tfrac12+\tfrac13)\frac{(\tfrac14 z^2)^3}{(3!)^2}-\ldots\Big\}$$

9.1.14

$$J_\nu(z)J_\mu(z)=(\tfrac12 z)^{\nu+\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k\Gamma(\nu+\mu+2k+1)(\tfrac14 z^2)^k}{\Gamma(\nu+k+1)\Gamma(\mu+k+1)\Gamma(\nu+\mu+k+1)\,k!}$$

Wronskians

9.1.15

$$W\{J_\nu(z),J_{-\nu}(z)\}=J_{\nu+1}(z)J_{-\nu}(z)+J_\nu(z)J_{-(\nu+1)}(z)=-2\sin(\nu\pi)/(\pi z)$$

9.1.16

$$W\{J_\nu(z),Y_\nu(z)\}=J_{\nu+1}(z)Y_\nu(z)-J_\nu(z)Y_{\nu+1}(z)=2/(\pi z)$$

9.1.17

$$W\{H_\nu^{(1)}(z),H_\nu^{(2)}(z)\}=H_{\nu+1}^{(1)}(z)H_\nu^{(2)}(z)-H_\nu^{(1)}(z)H_{\nu+1}^{(2)}(z)=-4i/(\pi z)$$

Integral Representations

9.1.18

$$J_0(z)=\frac1\pi\int_0^\pi\cos(z\sin\theta)d\theta=\frac1\pi\int_0^\pi\cos(z\cos\theta)d\theta$$

9.1.19

$$Y_0(z)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac12\pi}\cos(z\cos\theta)\{\gamma+\ln(2z\sin^2\theta)\}\,d\theta$$

9.1.20

$$J_\nu(z)=\frac{(\tfrac12 z)^\nu}{\pi^{\frac12}\Gamma(\nu+\frac12)}\int_0^\pi\cos(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\,d\theta=\frac{2(\tfrac12 z)^\nu}{\pi^{\frac12}\Gamma(\nu+\frac12)}\int_0^1(1-t^2)^{\nu-\frac12}\cos(zt)dt\quad(\mathscr{R}\nu>-\tfrac12)$$

9.1.21

$$J_n(z)=\frac1\pi\int_0^\pi\cos(z\sin\theta-n\theta)d\theta=\frac{i^{-n}}{\pi}\int_0^\pi e^{iz\cos\theta}\cos(n\theta)d\theta$$

9.1.22

$$J_\nu(z)=\frac1\pi\int_0^\pi\cos(z\sin\theta-\nu\theta)d\theta-\frac{\sin(\nu\pi)}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\sinh t-\nu t}dt\quad(|\arg z|<\tfrac12\pi)$$

$$Y_\nu(z)=\frac1\pi\int_0^\pi\sin(z\sin\theta-\nu\theta)d\theta-\frac1\pi\int_0^\infty\{e^{\nu t}+e^{-\nu t}\cos(\nu\pi)\}e^{-z\sinh t}dt\quad(|\arg z|<\tfrac12\pi)$$

9.1.23

$$J_0(x)=\frac2\pi\int_0^\infty\sin(x\cosh t)dt\quad(x>0)$$

$$Y_0(x)=-\frac2\pi\int_0^\infty\cos(x\cosh t)dt\quad(x>0)$$

9.1.24

$$J_\nu(x)=\frac{2(\tfrac12 x)^{-\nu}}{\pi^{\frac12}\Gamma(\frac12-\nu)}\int_1^\infty\frac{\sin(xt)\,dt}{(t^2-1)^{\nu+\frac12}}\quad(|\mathscr{R}\nu|<\tfrac12,x>0)$$

$$Y_\nu(x)=-\frac{2(\tfrac12 x)^{-\nu}}{\pi^{\frac12}\Gamma(\frac12-\nu)}\int_1^\infty\frac{\cos(xt)dt}{(t^2-1)^{\nu+\frac12}}\quad(|\mathscr{R}\nu|<\tfrac12,x>0)$$

9.1.25

$$H_\nu^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty+\pi i}e^{z\sinh t-\nu t}dt\quad(|\arg z|<\tfrac12\pi)$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty-\pi i}e^{z\sinh t-\nu t}dt\quad(|\arg z|<\tfrac12\pi)$$

9.1.26

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(-t)(\tfrac12 x)^{\nu+2t}}{\Gamma(\nu+t+1)}dt\quad(\mathscr{R}\nu>0,x>0)$$

In the last integral the path of integration must lie to the left of the points $t=0,1,2,\ldots$.

Table 9.1 BESSEL FUNCTIONS—ORDERS 0, 1 AND 2

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$
0.0	1.00000 00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
0.1	0.99750 15620 66040	0.04993 75260	0.00124 89587
0.2	0.99002 49722 39576	0.09950 08326	0.00498 33542
0.3	0.97762 62465 38296	0.14831 88163	0.01116 58619
0.4	0.96039 82266 59563	0.19602 65780	0.01973 46631
0.5	0.93846 98072 40813	0.24226 84577	0.03060 40235
0.6	0.91200 48634 97211	0.28670 09881	0.04366 50967
0.7	0.88120 08886 07405	0.32899 57415	0.05878 69444
0.8	0.84628 73527 50480	0.36884 20461	0.07581 77625
0.9	0.80752 37981 22545	0.40594 95461	0.09458 63043
1.0	0.76519 76865 57967	0.44005 05857	0.11490 34849
1.1	0.71962 20185 27511	0.47090 23949	0.13656 41540
1.2	0.67113 27442 64363	0.49828 90576	0.15934 90183
1.3	0.62008 59895 61509	0.52202 32474	0.18302 66988
1.4	0.56685 51203 74289	0.54194 77139	0.20735 58995
1.5	0.51182 76717 35918	0.55793 65079	0.23208 76721
1.6	0.45540 21676 39381	0.56989 59353	0.25696 77514
1.7	0.39798 48594 46109	0.57776 52315	0.28173 89424
1.8	0.33998 64110 42558	0.58151 69517	0.30614 35353
1.9	0.28181 85593 74385	0.58115 70727	0.32992 57277
2.0	0.22389 07791 41236	0.57672 48078	0.35283 40286
2.1	0.16660 69803 31990	0.56829 21358	0.37462 36252
2.2	0.11036 22669 22174	0.55596 30498	0.39505 86875
2.3	0.05553 97844 45602	0.53987 25326	0.41391 45917
2.4	+0.00250 76832 97244	0.52018 52682	0.43098 00402
2.5	−0.04838 37764 68198	0.49709 41025	0.44605 90584
2.6	−0.09680 49543 97038	0.47081 82665	0.45897 28517
2.7	−0.14244 93700 46012	0.44160 13791	0.46956 15027
2.8	−0.18503 60333 64387	0.40970 92469	0.47768 54954
2.9	−0.22431 15457 91968	0.37542 74818	0.48322 70505
3.0	−0.26005 19549 01933	0.33905 89585	0.48609 12606
3.1	−0.29206 43476 50698	0.30092 11331	0.48620 70142
3.2	−0.32018 81696 57123	0.26134 32488	0.48352 77001
3.3	−0.34429 62603 98885	0.22066 34530	0.47803 16865
3.4	−0.36429 55967 62000	0.17922 58517	0.46972 25683
3.5	−0.38012 77399 87263	0.13737 75274	0.45862 91842
3.6	−0.39176 89837 00798	0.09546 55472	0.44480 53988
3.7	−0.39923 02033 71191	0.05383 39877	0.42832 96562
3.8	−0.40255 64101 78564	+0.01282 10029	0.40930 43065
3.9	−0.40182 60148 87640	−0.02724 40396	0.38785 47125
4.0	−0.39714 98098 63847	−0.06604 33280	0.36412 81459
4.1	−0.38866 96798 35854	−0.10327 32577	0.33829 24809
4.2	−0.37655 70543 67568	−0.13864 69421	0.31053 47010
4.3	−0.36101 11172 36535	−0.17189 65602	0.28105 92288
4.4	−0.34225 67900 03886	−0.20277 55219	0.25008 60982
4.5	−0.32054 25089 85121	−0.23106 04319	0.21784 89837
4.6	−0.29613 78165 74141	−0.25655 28361	0.18459 31052
4.7	−0.26933 07894 19753	−0.27908 07358	0.15057 30295
4.8	−0.24042 53272 91183	−0.29849 98581	0.11605 03864
4.9	−0.20973 83275 85326	−0.31469 46710	0.08129 15231
5.0	−0.17759 67713 14338	−0.32757 91376	0.04656 51163
	$\begin{bmatrix}(-4)6\\11\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)5\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)3\\7\end{bmatrix}$

$$J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)-J_{n-1}(x)$$

Compiled from British Association for the Advancement of Science, Bessel functions, Part II. Functions of positive integer order, Mathematical Tables, vol. X (Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1952) and Harvard Computation Laboratory, Tables of the Bessel functions of the first kind of orders 0 through 135, vols. 3–14 (Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1947–1951) (with permission).

Pages choisies (PBM)

2.16.38. Integrals of $x^{\alpha} J_{\lambda}(ax^m)\, J_{\mu}(bx^n)\, K_{\nu}(cx)$.

1. $$\int_0^\infty x^{\alpha-1} J_\mu(ax^2)\, J_\nu(cx)\, K_\nu(cx)\, dx = \frac{1}{8\nu}\left(\frac{2}{a}\right)^{\alpha/2} \Gamma\begin{bmatrix}(2\mu+\alpha)/4\\ 1+(2\mu-\alpha)/4\end{bmatrix} \times$$
$$\times\, {}_2F_3\left(\frac{\alpha-2\mu}{4}, \frac{\alpha+2\mu}{4};\ \frac{1}{2}, 1-\frac{\nu}{2}, 1+\frac{\nu}{2};\ \frac{c^4}{16a^2}\right) - \frac{2^{\alpha/2-3} c^2}{(\nu^2-1)\, a^{\alpha/2+1}} \times$$
$$\times \Gamma\begin{bmatrix}(2+2\mu+\alpha)/4\\ (2+2\mu-\alpha)/4\end{bmatrix} {}_2F_3\left(\frac{1-\mu}{2}+\frac{\alpha}{4}, \frac{1+\mu}{2}+\frac{\alpha}{4};\ \frac{3}{2}, \frac{3-\nu}{2}, \frac{3+\nu}{2};\ \frac{c^4}{16a^2}\right) +$$
$$+ \frac{2^{\alpha/2-\nu-3} c^{2\nu}}{a^{\alpha/2+\nu}} \Gamma\begin{bmatrix}-\nu, & (2\mu+2\nu+\alpha)/4\\ \nu+1, & 1+(2\mu-2\nu-\alpha)/4\end{bmatrix} \times$$
$$\times\, {}_2F_3\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\nu-\mu}{2}, \frac{\alpha}{4}+\frac{\nu+\mu}{2};\ 1+\frac{\nu}{2}, \frac{1+\nu}{2}, 1+\nu;\ \frac{c^4}{16a^2}\right)$$
$[a,\ \operatorname{Re} c,\ \operatorname{Re}(\alpha+2\mu),\ \operatorname{Re}(\alpha+2\mu+2\nu) > 0]$.

2. $$\int_0^\infty x J_\mu(ax^2)\, J_\nu(cx)\, K_\nu(cx)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2c^2} \Gamma\begin{bmatrix}(\mu+\nu+1)/2\\ \nu+1\end{bmatrix} M_{-\mu/2,\, \nu/2}\left(\frac{c^2}{2a}\right) W_{-\mu/2,\, \nu/2}\left(\frac{c^2}{2a}\right)$$
$[a>0;\ |\arg c| < \pi/4;\ \operatorname{Re}\mu,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu) > -1]$.

3. $$\int_0^\infty x J_0(ax^2)\, J_\nu(cx)\, K_\nu(cx)\, dx = \frac{1}{4a} I_{\nu/2}\left(\frac{c^2}{4a}\right) K_{\nu/2}\left(\frac{c^2}{4a}\right)$$
$[a>0;\ |\arg c| < \pi/4;\ \operatorname{Re}\nu > -1]$.

4. $$\int_0^\infty x^{\nu+2} J_{(\nu+1)/2}(ax^2)\, J_\nu(cx)\, K_\nu(cx)\, dx = \frac{c^\nu}{2^{(\nu+3)/2}\sqrt{\pi}\, a^{\nu+3/2}} K_{\nu/2}\left(\frac{c^2}{2a}\right)$$
$[a>0;\ |\arg c| < \pi/4;\ \operatorname{Re}\nu > -1]$.

5. $$\int_0^\infty x^{\nu+3} J_{\nu/2}(ax^2)\, J_\nu(cx)\, K_\nu(cx)\, dx = \frac{c^{\nu+1}}{2^{\nu/2+2}\sqrt{\pi}\, a^{\nu+5/2}} K_{(\nu-1)/2}\left(\frac{c^2}{2a}\right)$$
$[a>0;\ |\arg c| < \pi/4;\ \operatorname{Re}\nu > -1]$.

6. $$\int_0^\infty x^{2-\nu} J_{(\nu-1)/2}(ax^2)\, J_\nu(cx)\, K_\nu(cx)\, dx =$$
$$= 2^{(\nu-5)/2}\sqrt{\pi}\, a^{\nu-3/2} c^{-\nu}\left[I_{\nu/2}\left(\frac{c^2}{2a}\right) - \mathbf{L}_{\nu/2}\left(\frac{c^2}{2a}\right)\right]$$
$[a>0;\ |\arg c| < \pi/4;\ \operatorname{Re}\nu > -1]$.

7. $$\int_0^\infty x^3 J_\nu(ax^2)\, J_\nu(cx)\, K_\nu(cx)\, dx = \frac{1}{4a^2}\exp\left(-\frac{c^2}{2a}\right)$$
$[a,\ \operatorname{Re} c > 0;\ \operatorname{Re}\nu > -1]$.

8. $$\int_0^\infty x^5 J_1(ax^2)\, J_2(cx)\, K_2(cx)\, dx = \frac{c^2}{8a^4}\exp\left(-\frac{c^2}{2a}\right)$$ $[a>0;\ |\arg c| < \pi/4]$.

9. $$\int_0^\infty x J_{\mu+\nu/4}(bx^2)\, J_{\mu-\nu/4}(bx^2)\, K_\nu(cx)\, dx =$$
$$= \frac{1}{\pi c^2}\Gamma\left(\mu+\frac{2+\nu}{4}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{2-\nu}{4}\right) W_{-\mu,\, \nu/4}\left(\frac{ic^2}{8b}\right) W_{-\mu,\, \nu/4}\left(-\frac{ic^2}{8b}\right)$$
$[b,\ \operatorname{Re} c > 0;\ 4\operatorname{Re}\mu > |\operatorname{Re}\nu| - 2]$.

$$\times\, {}_3F_2\left(\tau-\rho-n-1, -\rho-n, -\rho-\sigma-n;\ \tau-\rho-n, -\rho-\sigma-2n;\ \mp\frac{2a}{z-a}\right) +$$
$$+ \frac{(2a)^{\rho-\tau+1}}{n!}(\sigma+\tau)_n \mathrm{B}(\rho+n+1, \tau-\rho-n-1)\ln z$$
$\left[a>0;\ \operatorname{Re}\rho > -1;\ \operatorname{Re}(\rho-\tau) < -n-1,\ \begin{Bmatrix}|\arg(z-a)| < \pi\\ z > -a\end{Bmatrix}\right]$.

2.22.9. Integrals of $A(x)\, \mathrm{Ei}(a+bx)\, P_n^{(\rho,\sigma)}(cx)$.

1. $$\int_{-a}^{a} (x+a)^{\alpha-1}(a-x)^\rho\, \mathrm{Ei}(-ab-bx)\, P_n^{(\rho,\sigma)}\left(\frac{x}{a}\right) dx =$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}(\sigma-\alpha)_n \mathrm{B}(\rho+n+1, \alpha+1)(2a)^{\alpha+\rho+1} b \times$$
$$\times\, {}_4F_4(1, 1, \alpha-\sigma+1, \alpha+1;\ 2, 2, \alpha-\sigma-n+1, \alpha+\rho+n+2;\ -2ab) -$$
$$- \frac{(-1)^n}{n!}(\sigma-\alpha+1)_n \mathrm{B}(\alpha, \rho+n+1)(2a)^{\alpha+\rho} \times$$
$$\times \left[C + \psi(\alpha) - \psi(\alpha+\rho+n+1) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\sigma-\alpha+j+1} + \ln(2ab)\right]$$
$[a,\ \operatorname{Re}\alpha > 0;\ \operatorname{Re}\rho > -1]$.

2. $$\int_a^\infty (x-a)^\rho (x+a)^{-\tau}\, \mathrm{Ei}(-ab-bx)\, P_n^{(\rho,\sigma)}\left(\frac{x}{a}\right) dx =$$
$$= -\frac{(\sigma+\tau-1)_n}{n!}\mathrm{B}(\rho+n+1, \tau-\rho-n-2)(2a)^{\rho-\tau+2} b \times$$
$$\times\, {}_4F_4(1, 1, 2-\sigma-\tau, 2-\tau;\ 2, 2, 2-\sigma-\tau-n, \rho-\tau+n+3;\ -2ab) +$$
$$+ \frac{(\rho+\sigma+n+1)_n\, b^{\tau-\rho-n-1}}{n!\,(\tau-\rho-n-1)(2a)^n}\Gamma(\rho-\tau+n+1) \times$$
$$\times\, {}_3F_3(\tau-\rho-n-1, -\rho-n, -\rho-\sigma-n;\ \tau-\rho-n, \tau-\rho-n, -\rho-\sigma-2n;\ -2ab) +$$
$$+ \frac{(\sigma+\tau)_n}{n!}\mathrm{B}(\rho+n+1, \tau-\rho-n-1)(2a)^{\rho-\tau+1} \times$$
$$\times \left[C + \psi(\tau) - \psi(\tau-\rho-n-1) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\sigma+\tau+j} + \ln(2ab)\right]$$
$[a,\ \operatorname{Re} b > 0;\ \operatorname{Re}\rho > -1]$.

2.22.10. Integrals of $A(x)\begin{Bmatrix}\mathrm{si}(b\sqrt{x+a})\\ \mathrm{ci}(b\sqrt{x+a})\end{Bmatrix} P_n^{(\rho,\sigma)}(cx)$.

Notation: $\delta = \begin{Bmatrix}1\\ 0\end{Bmatrix}$.

1. $$\int_{-a}^{a} (x+a)^{\alpha-1}(a-x)^\rho \begin{Bmatrix}\mathrm{si}(b\sqrt{x+a})\\ \mathrm{ci}(b\sqrt{x+a})\end{Bmatrix} P_n^{(\rho,\sigma)}\left(\frac{x}{a}\right) dx =$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}(\sigma-\alpha-\delta/2)_n}{3^{2\delta} n!} 2^{\alpha+\rho+3\delta/2-1}\mathrm{B}\left(\rho+n+1, \alpha+\frac{\delta}{2}+1\right) \times$$
$$\times\, a^{\alpha+\rho+\delta/2+1} b^{\delta+2}\, {}_4F_5\left(1, \alpha+\frac{\delta}{2}-\sigma+1, \frac{\delta}{2}+1, \alpha+\frac{\delta}{2}+1;\right.$$
$$\left. 2, \alpha+\rho+\frac{\delta}{2}+n+2, \delta+\frac{3}{2}, \frac{\delta}{2}+2, \alpha+\frac{\delta}{2}-\sigma-n+1;\ -\frac{ab^2}{2}\right) +$$

Calculs automatiques d'approximations

- Développements de Taylor :

$$\mathrm{Ai}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \frac{\sqrt[3]{3}x^{3n}}{9^n \Gamma\left(n + \frac{2}{3}\right) n!} - \frac{1}{9} \frac{3^{2/3} x^{3n+1}}{9^n \Gamma\left(n + \frac{4}{3}\right) n!}.$$

- Développements de Tchebycheff :

$$\cos(x) = J_0\left(1\right) T_0\left(x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n J_{2n}\left(1\right) T_{2n}\left(x\right),$$

$$\mathrm{erf}\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{(-1)^n \; {}_1F_1\left(\begin{matrix} n+\frac{1}{2} \\ 2n+2 \end{matrix} \middle| -1\right) T_{2n+1}\left(x\right)}{\sqrt{\pi} 4^n \left(2n+1\right) n!}.$$

- Approximations exactes jusqu'au dernier chiffre :

$$\mathrm{Ai}\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) \approx 0{,}28881085384820872173256483671407046811262524805800 \ldots$$
$$- i\, 0{,}06285934655654573023276143694398895654562496105515 \ldots$$

$$\frac{1}{\pi} \approx 0{,}31830988618379067153776752674502872406891929148091 \ldots$$

Identités univariées automatiques

$$F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^n$$ Cassini

$$\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{z^n}{n+1}$$ Catalan

$${}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} a, b \\ a+b+1/2 \end{matrix}\right| z\right) = {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} 2a, 2b \\ a+b+1/2 \end{matrix}\right| \frac{1-\sqrt{1-z}}{2}\right)$$ Legendre

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) H_n(y) \frac{u^n}{n!} = \frac{\exp\left(\frac{4u(xy-u(x^2+y^2))}{1-4u^2}\right)}{\sqrt{1-4u^2}}$$ Mehler

Identités multivariées automatiques

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^3$$ Strehl (1992)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) y^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}}, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 x^k$$

$$\int_0^{+\infty} x J_1(ax) I_1(ax) Y_0(x) K_0(x) \, dx = -\frac{\ln(1-a^4)}{2\pi a^2}$$ Gl.–Mo. (1994)

$$\oint_0 \frac{(1+2xy+4y^2)\exp\left(\frac{4x^2y^2}{1+4y^2}\right)}{y^{n+1}(1+4y^2)^{\frac{3}{2}}} \, dy = \frac{n! H_n(x)}{\lfloor n/2 \rfloor !}$$ Doetsch (1930)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{q^{k^2}}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k q^{(5k^2-k)/2}}{(q;q)_{n-k}(q;q)_{n+k}}$$ Andrews (1974)

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{q^{(i+j)^2+j^2}}{(q;q)_{n-i-j}(q;q)_i(q;q)_j} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k q^{7/2k^2+1/2k}}{(q;q)_{n+k}(q;q)_{n-k}}$$ Paule (1985)

Encyclopédies et formulaires sur le web

Dans le monde :

- http ://dlmf.nist.gov/, (1998–)
- `http://functions.wolfram.com/`, (2009–)

Encyclopédies et formulaires sur le web

Dans le monde :

- http ://dlmf.nist.gov/, (1998–)
- http://functions.wolfram.com/, (2009–)

Par notre équipe :

- http://algo.inria.fr/esf/, (2001–2006)
- http://ddmf.msr-inria.inria.fr/, (2008–)

Plan de la journée

Séance 1

Propriétés de clôture des fonctions spéciales univariées (gfun)

Séance 2

- Évaluation numérique rapide en précision arbitraire garantie (NumGfun)
- Encyclopédie mathématiques en ligne (DynaMoW et le DDMF)

Séance 3

Sommes et intégrales des fonctions spéciales multivariées (Mgfun)

Première partie

Où il sera question de clôtures univariées

Plan

Décider l'indécidable ?

Théorème (Richardson, 1968)

Dans la classe obtenue à partir de $\mathbb{Q}(x)$, π, $\log 2$ *par les opérations* $+$, $-$, $\times$ *et par composition avec* $\exp$, $\sin$ *and* $|\cdot|$, *le test d'équivalence à zéro est indécidable.*

Décider l'indécidable ?

Théorème (Richardson, 1968)

Dans la classe obtenue à partir de $\mathbb{Q}(x)$, π, $\log 2$ *par les opérations* $+$, $-$, $\times$ *et par composition avec* exp, sin *and* $|\cdot|$, *le test d'équivalence à zéro est indécidable.*

Conséquences :

1. « Simplifier » est toujours difficile, souvent mal défini ;
2. Faire du calcul formel, c'est isoler des classes pour lesquelles on peut fournir des algorithmes.

Exemple : Nombres algébriques

Un polynôme irréductible est une bonne structure de données pour représenter ses racines (et calculer avec).

Exemple : Nombres algébriques

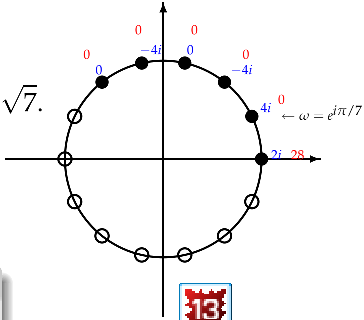
Un polynôme irréductible est une bonne structure de données pour représenter ses racines (et calculer avec).

Ex. : $$x := \frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin^2\frac{3\pi}{7}} - \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin^2\frac{2\pi}{7}} + \frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin^2\frac{\pi}{7}} = 2\sqrt{7}.$$

Exemple : Nombres algébriques

Un polynôme irréductible est une bonne structure de données pour représenter ses racines (et calculer avec).

Ex. : $x := \dfrac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin^2\frac{3\pi}{7}} - \dfrac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin^2\frac{2\pi}{7}} + \dfrac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin^2\frac{\pi}{7}} = 2\sqrt{7}.$



$x \in \mathbb{Q}(i,\omega)$, de dimension 2×6 sur $\mathbb{Q}$.

Coords de x $\to$ Coords de x^2 $\to$ x

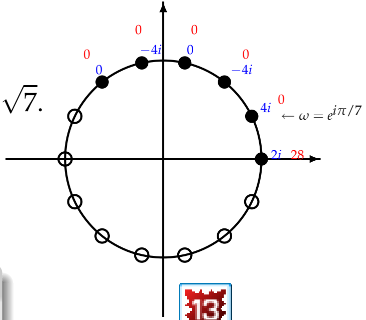
Définition

Un nombre $\alpha \in \mathbb{C}$ est algébrique quand ses puissances engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}$.

Exemple : Nombres algébriques

Un polynôme irréductible est une bonne structure de données pour représenter ses racines (et calculer avec).

Ex. : $\quad x := \dfrac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin^2\frac{3\pi}{7}} - \dfrac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin^2\frac{2\pi}{7}} + \dfrac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin^2\frac{\pi}{7}} = 2\sqrt{7}.$



$x \in \mathbb{Q}(i, \omega)$, de dimension 2×6 sur $\mathbb{Q}$.

Coords de x $\rightarrow$ Coords de x^2 $\rightarrow$ x

Définition

Un nombre $\alpha \in \mathbb{C}$ est algébrique quand ses puissances engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}$.

Outils : division euclidienne, algorithme d'Euclide (étendu), algèbre linéaire.

Plan

Séries différentiellement finies

Définition (Stanley, 1980, 1999)

Une *série formelle* $f \in \mathbb{Q}[[x]]$ est différentiellement finie (D-finie) quand ses dérivées engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}(x)$.

Séries différentiellement finies

Définition (Stanley, 1980, 1999)

Une *série formelle* $f \in \mathbb{Q}[[x]]$ est différentiellement finie (D-finie) quand ses dérivées engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}(x)$.

Définition équivalente : Une série formelle f est D-finie s'il existe des polynômes $a_i \in \mathbb{Q}[x]$ tels que (« ÉDL »)

$$a_k(x)f^{(k)}(x) + \cdots + a_0(x)f(x) = 0.$$

Séries différentiellement finies

Définition (Stanley, 1980, 1999)

Une *série formelle* $f \in \mathbb{Q}[[x]]$ est différentiellement finie (D-finie) quand ses dérivées engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}(x)$.

Définition équivalente : Une série formelle f est D-finie s'il existe des polynômes $a_i \in \mathbb{Q}[x]$ tels que (« ÉDL »)

$$a_k(x)f^{(k)}(x) + \cdots + a_0(x)f(x) = 0.$$

Exemples : exp, log, sin, cos, sinh, cosh, arccos, arccosh, arcsin, arcsinh, arctan, arctanh, arccot, arccoth, arccsc, arccsch, arcsec, arcsech, ${}_pF_q$ (inclut les f. de Bessel, J, Y, I et K, de Airy Ai et Bi, et les polylogarithmes), les f. de Struve, Weber et Anger, la grande classe des fonctions algébriques, …

Séries différentiellement finies

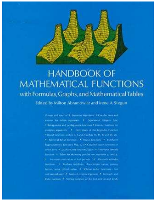
Définition (Stanley, 1980, 1999)

Une *série formelle* $f \in \mathbb{Q}[[x]]$ est différentiellement finie (D-finie) quand ses dérivées engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}(x)$.

Définition équivalente : Une série formelle f est D-finie s'il existe des polynômes $a_i \in \mathbb{Q}[x]$ tels que (« ÉDL »)

$$a_k(x)f^{(k)}(x) + \cdots + a_0(x)f(x) = 0.$$

Exemples : exp, log, sin, cos, sinh, cosh, arccos, arccosh, arcsin, arcsinh, arctan, arctanh, arccot, arccoth, arccsc, arccsch, arcsec, arcsech, ${}_pF_q$ (inclut les f. de Bessel, J, Y, I et K, de Airy Ai et Bi, et les polylogarithmes), les f. de Struve, Weber et Anger, la grande classe des fonctions algébriques, ...



Environ 60% d'Abramowitz & Stegun.

Coefficients ↔ Séries

Théorème (XIX^e siècle ; Stanley, 1980, 1999)

Une série est D-finie si et seulement si sa série de coefficients vérifie une récurrence linéaire.

Coefficients $\leftrightarrow$ Séries

Théorème (XIXe siècle ; Stanley, 1980, 1999)

Une série est D-finie si et seulement si sa série de coefficients vérifie une récurrence linéaire.

Preuve (par un dictionnaire + suivi des conditions initiales) :

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad f' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \quad xf = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n.$$

$$x^i f^{(j)} \to \sum_{n=i}^{\infty} (n-i+1)(n-i+2)\dots(n+j-i) a_{n+j-i} x^n$$

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^k (x^{-i} f) + P(x^{-1}) \leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+i} n^k x^n$$

Coefficients $\leftrightarrow$ Séries

Théorème (XIXe siècle ; Stanley, 1980, 1999)

Une série est D-finie si et seulement si sa série de coefficients vérifie une récurrence linéaire.

Preuve (par un dictionnaire + suivi des conditions initiales) :

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad f' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \quad xf = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n.$$

$$x^i f^{(j)} \to \sum_{n=i}^{\infty} (n-i+1)(n-i+2)\dots(n+j-i) a_{n+j-i} x^n$$

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^k (x^{-i} f) + P(x^{-1}) \leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+i} n^k x^n$$

Attention : Les ordres diffèrent !

Suites P-récursives

Définition (Stanley, 1980, 1999)

Une *suite* (u_n) est P-récursive quand ses décalées (u_n), (u_{n+1}), (u_{n+2}), …, engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}(n)$.

Suites P-récursives

Définition (Stanley, 1980, 1999)

Une *suite* (u_n) est P-récursive quand ses décalées (u_n), (u_{n+1}), (u_{n+2}), …, engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}(n)$.

Définition équivalente : Une suite (u_n) est P-récursive s'il existe des polynômes $a_i \in \mathbb{Q}[n]$ tels que (« ÉRL »)

$$a_k(n)u_{n+k} + \cdots + a_0(n)u_n = 0.$$

Suites P-récursives

Définition (Stanley, 1980, 1999)

Une *suite* (u_n) est P-récursive quand ses décalées (u_n), (u_{n+1}), (u_{n+2}), ..., engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}(n)$.

Définition équivalente : Une suite (u_n) est P-récursive s'il existe des polynômes $a_i \in \mathbb{Q}[n]$ tels que (« ÉRL »)

$$a_k(n)u_{n+k} + \cdots + a_0(n)u_n = 0.$$

Exemples : suites rationnelles, suites hypergéométriques (inclut $n!$, les multinomiaux, ...), polynômes orthogonaux classiques.

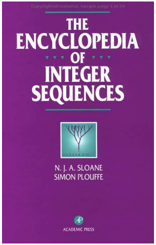
Suites P-récursives

Définition (Stanley, 1980, 1999)

Une *suite* (u_n) est P-récursive quand ses décalées (u_n), (u_{n+1}), (u_{n+2}), …, engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}(n)$.

Définition équivalente : Une suite (u_n) est P-récursive s'il existe des polynômes $a_i \in \mathbb{Q}[n]$ tels que (« ÉRL »)

$$a_k(n)u_{n+k} + \cdots + a_0(n)u_n = 0.$$



Exemples : suites rationnelles, suites hypergéométriques (inclut $n!$, les multinomiaux, …), polynômes orthogonaux classiques.

Environ 25% de Sloane & Plouffe.

$$\boxed{\text{équation} + \text{conditions initiales} = \text{structure de données}}$$

Exemple : Séries hypergéométriques et généralisées

La série hypergéométrique de Gauss,

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \quad \text{pour} \quad u_n := \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!}, \quad \text{est solution de} $$

$$ (\theta + c - 1)\theta(f) = x(\theta + a)(\theta + b)(f) \quad \text{pour } \theta := x\,\frac{d}{dx}, $$

$$ \text{car} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+1)} \quad \text{(suite hypergéométrique).} $$

$(\alpha)_n := \alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + n - 1)$.

Exemple : Séries hypergéométriques et généralisées

La série hypergéométrique de Gauss,

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \quad \text{pour} \quad u_n := \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!}, \quad \text{est solution de}$$

$$(\theta + c - 1)\theta(f) = x(\theta + a)(\theta + b)(f) \quad \text{pour } \theta := x\,\frac{d}{dx},$$

$$\text{car} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+1)} \quad \text{(suite hypergéométrique).}$$

$(\alpha)_n := \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$.

Série hyperg. généralisée ${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \middle| x\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n n!} x^n$:

$$\big((\theta + a_1 - 1)\dots(\theta + a_p - 1)x - \theta(\theta + b_1 - 1)\dots(\theta + b_q - 1)\big)(f) = 0,$$

$$\text{car} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+a_1)\dots(n+a_p)}{(n+b_1)\dots(n+b_p)(n+1)}.$$

Cas particuliers

$$\exp(z) = {}_0F_0\left(\left.\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}\,\right|\, z\right) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots,$$

$$(1-z)^{-a} = {}_1F_0\left(\left.\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}\,\right|\, z\right) = 1 + az + a(a+1)\frac{z^2}{2!} + \cdots,$$

$$\log\frac{1}{1-z} = z\,{}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} 1,1 \\ 2 \end{matrix}\,\right|\, z\right) = z + \frac{z^2}{2} + \cdots,$$

$$\arcsin(z) = z\,{}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} \frac{1}{2},\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix}\,\right|\, z\right), \quad \arctan(z) = z\,{}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} \frac{1}{2},1 \\ \frac{3}{2} \end{matrix}\,\right|\, z\right),$$

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_0F_1\left(\left.\begin{matrix} - \\ \nu+1 \end{matrix}\,\right|\, -\frac{z^2}{4}\right),$$

$$\mathrm{AGM}(a,b) = \frac{a}{{}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} \frac{1}{2},\frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix}\,\right|\, 1-\frac{b^2}{a^2}\right)}, \ \ldots$$

Plan

Preuve de l'identité $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

```
> series( sin(x)^2 + cos(x)^2, x, 4 ) ;
```

$$1 + \mathrm{O}(x^4)$$

En quoi est-ce une preuve ?

Preuve de l'identité $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

```
> series( sin(x)^2 + cos(x)^2, x, 4 ) ;
```

$$1 + \mathrm{O}(x^4)$$

En quoi est-ce une preuve ?

1. sin et cos vérifient une ÉDL du second ordre : $y'' + y = 0$.
2. Leurs carrés (puis la somme) vérifient une ÉDL d'ordre 3 (base $\sin^2, \cos^2, \sin\cos$).
3. La constante 1 vérifie une ÉDL du premier order : $y' = 0$.
4. $\sin^2 + \cos^2 - 1$ vérifie une ÉDL d'ordre au plus 4.
5. Elle n'est pas singulière en 0.
6. Conclusion par le théorème de Cauchy.

Preuve de l'identité $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

```
> series( sin(x)^2 + cos(x)^2, x, 4 ) ;
```

$$1 + \mathrm{O}(x^4)$$

En quoi est-ce une preuve ?

1. sin et cos vérifient une ÉDL du second ordre : $y'' + y = 0$.
2. Leurs carrés (puis la somme) vérifient une ÉDL d'ordre 3 (base $\sin^2, \cos^2, \sin\cos$).
3. La constante 1 vérifie une ÉDL du premier order : $y' = 0$.
4. $\sin^2 + \cos^2 - 1$ vérifie une ÉDL d'ordre au plus 4.
5. Elle n'est pas singulière en 0.
6. Conclusion par le théorème de Cauchy.

Autre identité (même idée) : $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}$.

```
> seq( fib(n)^2 - fib(n+1) * fib(n-1) + (-1)^n, n=0..4 ) ;
```

$$0, 0, 0, 0, 0$$

Division euclidienne et dimension finie

Théorème (XIXe siècle)

Les séries D-finies, resp. les suites P-récursives, forment une $\mathbb{Q}$-algèbre.

Division euclidienne et dimension finie

Théorème (XIX^e siècle)

Les séries D-finies, resp. les suites P-récursives, forment une $\mathbb{Q}$-algèbre.

Preuve (pour le produit de séries) :

$$f^{(n)} = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{n-1} f^{(n-1)},\ g^{(m)} = b_0 g + b_1 g' + \cdots + b_{m-1} g^{(m-1)}.$$

$$h = fg, \quad h' = f'g + fg', \quad \ldots, h^{(k)} = \sum_{\substack{0 \leqslant i < n \\ 0 \leqslant j < m}} c_{i,j,k} f^{(i)} g^{(j)}$$

$\implies h, h', \ldots, h^{(mn)}$ sont linéairement dépendants.

Division euclidienne et dimension finie

Théorème (XIX^e siècle)

Les séries D-finies, resp. les suites P-récursives, forment une $\mathbb{Q}$-algèbre.

Preuve (pour le produit de séries) :

$$f^{(n)} = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{n-1} f^{(n-1)}, \; g^{(m)} = b_0 g + b_1 g' + \cdots + b_{m-1} g^{(m-1)}.$$

$$h = fg, \quad h' = f'g + fg', \quad \ldots, h^{(k)} = \sum_{\substack{0 \leqslant i < n \\ 0 \leqslant j < m}} c_{i,j,k} f^{(i)} g^{(j)}$$

$\Longrightarrow h, h', \ldots, h^{(mn)}$ sont linéairement dépendants.

Cette preuve fournit un algorithme.

Division euclidienne et dimension finie

Théorème (XIX^e siècle)

Les séries D-finies, resp. les suites P-récursives, forment une $\mathbb{Q}$-algèbre.

Preuve (pour le produit de séries) :

$$f^{(n)} = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{n-1} f^{(n-1)}, \quad g^{(m)} = b_0 g + b_1 g' + \cdots + b_{m-1} g^{(m-1)}.$$

$$h = fg, \quad h' = f'g + fg', \quad \ldots, h^{(k)} = \sum_{\substack{0 \leqslant i < n \\ 0 \leqslant j < m}} c_{i,j,k} f^{(i)} g^{(j)}$$

$$\implies h, h', \ldots, h^{(mn)} \text{ sont linéairement dépendants.}$$

Cette preuve fournit un algorithme.

Corollaire

Les séries D-finies sont closes sous le produit de Hadamard (terme à terme) product, les transformations de Laplace et Borel (FGO $\leftrightarrow$ FGE).

Division euclidienne et dimension finie

Théorème (XIXe siècle)

Les séries D-finies, resp. les suites P-récursives, forment une $\mathbb{Q}$-algèbre.

Preuve (pour le produit de séries) :

$$f^{(n)} = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{n-1} f^{(n-1)}, \; g^{(m)} = b_0 g + b_1 g' + \cdots + b_{m-1} g^{(m-1)}.$$

$$h = fg, \quad h' = f'g + fg', \quad \ldots, h^{(k)} = \sum_{\substack{0 \leqslant i < n \\ 0 \leqslant j < m}} c_{i,j,k} f^{(i)} g^{(j)}$$

$$\implies h, h', \ldots, h^{(mn)} \text{ sont linéairement dépendants.}$$

Cette preuve fournit un algorithme.

Corollaire

Les séries D-finies sont closes sous le produit de Hadamard (terme à terme) product, les transformations de Laplace et Borel (FGO $\leftrightarrow$ FGE).

Tout est implanté dans `gfun` (Salvy & Zimmermann, 1994).

Identité de Mehler sur les polynômes de Hermite

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)H_n(y)\frac{u^n}{n!} = \frac{\exp\left(\frac{4u(xy-u(x^2+y^2))}{1-4u^2}\right)}{\sqrt{1-4u^2}} \qquad \text{Mehler (1866).}$$

1. Définition des polynômes de Hermite $H_n(x)$ (D-finis sur $\mathbb{Q}(x)$) : récurrence d'ordre 2 ;
2. Produit par algèbre linéaire : $H_{n+n}(x)H_{n+n}(y)/(n+n)!$, $n \in \mathbb{N}$, engendré sur $\mathbb{Q}(x,n)$ par

$$\frac{H_n(x)H_n(y)}{n!}, \frac{H_{n+1}(x)H_n(y)}{n!}, \frac{H_n(x)H_{n+1}(y)}{n!}, \frac{H_{n+1}(x)H_{n+1}(y)}{n!}$$

   $\rightarrow$ récurrence d'ordre au plus 4 ;
3. Traduction en une ÉDL.

Les séries algébriques sont D-finies

… et même :

Théorème (Abel, ?1820– ; Cockle, 1860)

Les séries D-finies composées avec les séries formelles algébriques sont D-finies (dès que la composée a un sens).

Les séries algébriques sont D-finies

. . . et même :

Théorème (Abel, ?1820– ; Cockle, 1860)

Les séries D-finies composées avec les séries formelles algébriques sont D-finies (dès que la composée a un sens).

Démonstration.

$$P(x,\alpha) = 0 \text{ et } AP + BP_y = 1$$

$$\Rightarrow \alpha' = -\frac{P_x(x,\alpha)}{P_y(x,\alpha)} = (-BP_x \bmod P)(x,\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha^{(k)} \in \bigoplus_{i<\deg_y P} \mathbb{Q}(x)\alpha^i, \text{ qui est de dim. finie.}$$

$(f \circ \alpha)^{(p)}$ est combinaison linéaire des $(f^{(j)} \circ \alpha)\alpha^k \to$ alg. linéaire. $\square$

Les séries algébriques sont D-finies

… et même :

Théorème (Abel, ?1820– ; Cockle, 1860)

Les séries D-finies composées avec les séries formelles algébriques sont D-finies (dès que la composée a un sens).

Démonstration.

$$P(x,\alpha) = 0 \text{ et } AP + BP_y = 1$$
$$\Rightarrow \alpha' = -\frac{P_x(x,\alpha)}{P_y(x,\alpha)} = (-BP_x \bmod P)(x,\alpha)$$
$$\Rightarrow \alpha^{(k)} \in \bigoplus_{i<\deg_y P} \mathbb{Q}(x)\alpha^i, \text{ qui est de dim. finie.}$$

$(f \circ \alpha)^{(p)}$ est combinaison linéaire des $(f^{(j)} \circ \alpha)\alpha^k$ $\rightarrow$ alg. linéaire. □

exp $\int \alpha$ par le même principe.

Nombres de Motzkin (arbres unaires-binaires)

La série génératrice M des arbres unaires-binaires est annulée par :

$$P(x,y) := y - \left(1 + xy + xy^2\right).$$

Bézout : $AP + BP_y = 1 \Rightarrow M' = -(BP_x \bmod P)(x,M) = cM + d\,1.$

$\longrightarrow$ Espace vectoriel de dimension 2.

Nombres de Motzkin (arbres unaires-binaires)

La série génératrice M des arbres unaires-binaires est annulée par :

$$P(x,y) := y - \left(1 + xy + xy^2\right).$$

Bézout : $AP + BP_y = 1 \Rightarrow M' = -(BP_x \bmod P)(x, M) = cM + d\,1.$

$\longrightarrow$ Espace vectoriel de dimension 2.

```
> gfun[algeqtodiffeq](M = 1 + x*M + x*M^2, M(x)) ;
```

$$-1 - x + (1 - 3x)M(x) + (x - 6x^2 + x^3)M'(x)$$

```
> gfun[diffeqtorec](%, M(x), u(n)) ;
```

$$\{nu(n) + (-9 - 6n)u(1+n) + (3+n)u(n+2), u(0) = 1, u(1) = 2\}$$

$\longrightarrow$ Calcul rapide. Fonctionne pour un degré arbitraire.

Forêts d'arbres de Catalan

$$F(z) = \exp\left(\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}\right).$$

Même type de calcul :

$$\{(n+2)(n+1)u(n+2) = u(n) + 2(n+1)(2n+1)u(n+1),$$
$$u(0) = 1, u(1) = 1\}$$

Exemple d'asymptotique : Fonction de Airy à l'infini

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{\sqrt{z}e^{-\xi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi\left((u-1)(4u^2+4u+1)\right)}\, dv, \quad \xi = \frac{2}{3}z^{3/2},\ u = \sqrt{1+\frac{v^2}{3}}.$$

$$\mathrm{Ai}(z) \sim \frac{1}{2}\pi^{-1/2}z^{-1/4}e^{-\xi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\xi^{-n}\frac{\Gamma(3n+\frac{1}{2})}{54^n n!\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}.$$

Exemple d'asymptotique : Fonction de Airy à l'infini

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{\sqrt{z}e^{-\xi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi\left((u-1)(4u^2+4u+1)\right)}\,dv, \quad \xi = \frac{2}{3}z^{3/2},\ u = \sqrt{1+\frac{v^2}{3}}.$$

$$\mathrm{Ai}(z) \sim \frac{1}{2}\pi^{-1/2}z^{-1/4}e^{-\xi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\xi^{-n}\frac{\Gamma(3n+\frac{1}{2})}{54^n n!\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}.$$

Calcul :

1. changement de variables algébrique $t^2 = (u-1)(4u^2+4u+1)$

$$\to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi t^2} f(t)\,dt, \quad f(t) = \frac{dv}{dt}\ ;$$

2. récurrence vérifiée par les coefficients de f (« série génératrice ») ;
3. intégration terme à terme (par un produit de Hadamard).

Plan

Séries D-finies en arithmétique : Formes modulaires

Définition (Forme modulaire de poids $k \in \mathbb{Z}$)

f définie pour $\Im z > 0$ telle que $f\big((az+b)/(cz+d)\big) = (cz+d)^k f(z)$, pour toute matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ ou d'un de ses sous-groupes d'indice fini. Fonction modulaire : forme modulaire de poids 0.

Théorème (XIXe siècle)

Soit f une forme modulaire méromorphe de poids $k > 0$ et soit t une fonction modulaire. Alors, F définie par $F\big(t(z)\big) = f(z)$ vérifie une ÉDL d'ordre $k+1$ à coefficients algébriques.

Séries D-finies en arithmétique : Formes modulaires

Définition (Forme modulaire de poids $k \in \mathbb{Z}$)

f définie pour $\Im z > 0$ telle que $f\big((az+b)/(cz+d)\big) = (cz+d)^k f(z)$, pour toute matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ ou d'un de ses sous-groupes d'indice fini. Fonction modulaire : forme modulaire de poids 0.

Théorème (XIXe siècle)

Soit f une forme modulaire méromorphe de poids $k > 0$ et soit t une fonction modulaire. Alors, F définie par $F\big(t(z)\big) = f(z)$ vérifie une ÉDL d'ordre $k+1$ à coefficients algébriques.

Ex. [Beukers à propos de la preuve d'Apéry que $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$]

$$t(z) = \left(\frac{\eta(z)\eta(6z)}{\eta(2z)\eta(3z)}\right)^{12}, \quad f(z) = \frac{\big(\eta(2z)\eta(3z)\big)^7}{\big(\eta(z)\eta(6z)\big)^5},$$

$$F(t) = 1 + 5t + 73t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 t^n.$$

Séries D-finies en arithmétique : Non-algébricité

Définition (E-fonction)

Une E-fonction est une série $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n / n! \in K[[x]]$ telle que :

1. K est une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}$;
2. si $\epsilon > 0$, $N(c_n) = O(n^{\epsilon n})$ quand $n \to \infty$ $(N = \text{norme})$;
3. pour tout $\epsilon > 0$, il existe des $q_n \in \mathbb{Z}$ tels que $q_n c_k$ soit un entier de K pour $k = 0, \ldots, n$, avec la propriété $q_n = O(n^{\epsilon n})$.

Théorème (Siegel–Shidlovskii ; Nesterenko, 1999)

Soient $f_1, \ldots, f_m$ des E-fonctions algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}(z)$ et formant une solution du système d'équations différentielles

$$y_k' = q_{k,0} + \sum_{j=1}^{m} q_{k,j} y_j$$

pour des $q_{k,j} \in \mathbb{C}(z)$. Si $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}$ est non nul et n'est pas singularité du système, alors les $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ sont algébriquement indépendants.

Résumé

1. Les fonctions spéciales qui nous intéressent $\approx$ « nombres algébriques non commutatifs » ;
2. ÉDLs et ÉRLs peuvent être vus comme une structure de données ;
3. Algorithmes pour $+$, $\times$ et la traduction ÉDL $\leftrightarrow$ ÉRL ;
4. Plusieurs sources de « D-finitude » (séries algébriques, séries hypergéométriques, séries d'origine arithmétique) ;
5. Applications à la preuve d'identités, aux calculs de coefficients de développements.

Deuxième partie

Où il sera question de calcul numérique garanti

Plan

Évaluation rapide et garantie d'une fonction D-finie

Le problème, pour $\mathbb{K} := \mathbb{Q}[i]$

$$\begin{cases} \text{ÉDL à coeffs dans } \mathbb{K}[x], \\ \text{conds initiales dans } \mathbb{K}, \\ \text{point } \xi \text{ dans } \mathbb{K}, \\ \text{précision } p \in \mathbb{N} \end{cases} \to \begin{cases} \text{Approx. de } f(\xi) \text{ à } 10^{-p} \text{ près}, \\ \text{en temps (quasi-)proportionnel à } p. \end{cases}$$

Évaluation rapide et garantie d'une fonction D-finie

Le problème, pour $\mathbb{K} := \mathbb{Q}[i]$

$$\begin{cases} \text{ÉDL à coeffs dans } \mathbb{K}[x], \\ \text{conds initiales dans } \mathbb{K}, \\ \text{point } \xi \text{ dans } \mathbb{K}, \\ \text{précision } p \in \mathbb{N} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Approx. de } f(\xi) \text{ à } 10^{-p} \text{ près,} \\ \text{en temps (quasi-)proportionnel à } p. \end{cases}$$

Stratégie

1. Cas de base où ξ est dans le disque de convergence de la série de Taylor en 0 de f :
   - sommation en temps $\tilde{O}(n)$ de la troncature d'ordre n ;
   - borne effective $n \leqslant Cp$ garantissant la précision 10^{-p}.
2. Prolongement analytique effectif.

Application au calcul de constantes : $\pi, \exp(1), \ln 2, \gamma, \zeta(3), \ldots$

Hakmem (1972), Brent (1975), Chudnovsky$^{\times 2}$ (19{87,88})

Formules qui cachent souvent de la théorie des nombres profonde :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!\,(1103 + 26390n)}{n!^4 \cdot (4 \cdot 99)^{4n}}, \quad \text{Ramanujan (1914)},$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{53360\sqrt{640320}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!\,(13591409 + 545140134n)}{n!^3 (3n)!\,(8 \cdot 100100025 \cdot 327843840)^n},$$

Chudnovsky$^{\times 2}$ (1987).

La dernière est depuis utilisée par Maple et Mathematica :

- Récurrence d'ordre 1 $\rightarrow$ 14 nouveaux chiffres par itération.
- A fourni 4 milliards de chiffres (Chudnovsky$^{\times 2}$, 1994) …
- … puis 2700 milliards (Bellard, 2009).

Plan

Complexité binaire pour les opérations dans $\mathbb{N}$

(Rappels succints.)

Définition

L'écriture binaire d'un entier $k \in \mathbb{N}$ est la suite $b_\tau \ldots b_0$ telle que $k = \sum_{i=0}^{\tau} b_i \cdot 2^i$ et $b_\tau = 1$ si $k \neq 0$. Sa taille est $\lambda(k) := \lceil \log k \rceil = \tau + 1$.

Définition

Un algorithme binaire est un algorithme opérant sur des entiers écrits en base 2 et n'effectuant que des opérations sur les bits (additions, produits, comparaisons). (Modèle de calcul RAM.)

Définition

La complexité binaire d'un algorithme binaire est une fonction C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C(n)$ soit le plus grand nombre d'opérations binaires effectuées sur des entrées de taille au plus n.

Complexité binaire : l'addition et la multiplication

Addition

L'algorithme de la petite école a complexité $\mathsf{O}(n)$.

Multiplication : cas équilibré, $n \times n$

- Algorithme naïf : $\mathsf{I}(n) = \mathsf{O}(n^2)$.
- Karatsuba (1963) : $\mathsf{I}(n) = \mathsf{O}(n^{1{,}59})$.
- Transformée de Fourier rapide : $\mathsf{I}(n) = \mathsf{O}(n \log n \log\log n) = \tilde{\mathsf{O}}(n)$, Schönhage & Strassen (1971), voire meilleur $\tilde{\mathsf{O}}(n)$, Fürer (2007).

Complexité binaire : l'addition et la multiplication

Addition

L'algorithme de la petite école a complexité $\mathsf{O}(n)$.

Multiplication : cas équilibré, $n \times n$

- Algorithme naïf : $\mathsf{I}(n) = \mathsf{O}(n^2)$.
- Karatsuba (1963) : $\mathsf{I}(n) = \mathsf{O}(n^{1{,}59})$.
- Transformée de Fourier rapide : $\mathsf{I}(n) = \mathsf{O}(n \log n \log\log n) = \tilde{\mathsf{O}}(n)$, Schönhage & Strassen (1971), voire meilleur $\tilde{\mathsf{O}}(n)$, Fürer (2007).

Multiplication : cas déséquilibré, $\alpha n \times n$

Tout modèle : $\mathsf{O}\big(\alpha \mathsf{I}(n)\big)$ (algorithme de la petite école sur des blocs).

Complexité binaire : l'addition et la multiplication

Addition

L'algorithme de la petite école a complexité $\mathsf{O}(n)$.

Multiplication : cas équilibré, $n \times n$

- Algorithme naïf : $\mathsf{I}(n) = \mathsf{O}(n^2)$.
- Karatsuba (1963) : $\mathsf{I}(n) = \mathsf{O}(n^{1{,}59})$.
- Transformée de Fourier rapide :
  $\mathsf{I}(n) = \mathsf{O}(n \log n \log\log n) = \tilde{\mathsf{O}}(n)$, Schönhage & Strassen (1971), voire meilleur $\tilde{\mathsf{O}}(n)$, Fürer (2007).

Multiplication : cas déséquilibré, $\alpha n \times n$

Tout modèle : $\mathsf{O}\big(\alpha \mathsf{I}(n)\big)$ (algorithme de la petite école sur des blocs).

Hypothèse (toujours vérifiée)

$\mathsf{I}(\cdot)$ est croissante et sous-additive : $2\mathsf{I}(n/2) \leqslant \mathsf{I}(n)$.

Prototype d'analyse : Karatsuba

Quand les additions sont moins chères que les produits.

$$
\begin{aligned}
(a_\uparrow X + a_\downarrow)(b_\uparrow X + b_\downarrow) \\
&= a_\uparrow b_\uparrow X^2 + (a_\uparrow b_\downarrow + a_\downarrow b_\uparrow) X + a_\downarrow b_\downarrow \\
&= a_\uparrow b_\uparrow X^2 + a_\downarrow b_\downarrow + \big((a_\uparrow + a_\downarrow)(b_\uparrow + b_\downarrow) - a_\uparrow b_\uparrow - a_\downarrow b_\downarrow\big) X
\end{aligned}
$$

Prototype d'analyse : Karatsuba

Quand les additions sont moins chères que les produits.

$$
\begin{aligned}
(a_\uparrow X + a_\downarrow)(b_\uparrow X + b_\downarrow) \\
&= a_\uparrow b_\uparrow X^2 + (a_\uparrow b_\downarrow + a_\downarrow b_\uparrow) X + a_\downarrow b_\downarrow \\
&= a_\uparrow b_\uparrow X^2 + a_\downarrow b_\downarrow + \big((a_\uparrow + a_\downarrow)(b_\uparrow + b_\downarrow) - a_\uparrow b_\uparrow - a_\downarrow b_\downarrow\big) X
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{4 produits + 1 addition} \rightarrow \text{3 produits + 4 additions}}$

Prototype d'analyse : Karatsuba

Quand les additions sont moins chères que les produits.

$$\begin{aligned}(a_\uparrow X + a_\downarrow)(b_\uparrow X + b_\downarrow) \\ &= a_\uparrow b_\uparrow X^2 + (a_\uparrow b_\downarrow + a_\downarrow b_\uparrow)X + a_\downarrow b_\downarrow \\ &= a_\uparrow b_\uparrow X^2 + a_\downarrow b_\downarrow + \big((a_\uparrow + a_\downarrow)(b_\uparrow + b_\downarrow) - a_\uparrow b_\uparrow - a_\downarrow b_\downarrow\big)X\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{4 produits + 1 addition} \rightarrow \text{3 produits + 4 additions}}$$

Analyse pour $X = n/2$ avec $n = 2^\ell$:

$$\begin{aligned}C(n) &\leqslant 3C\left(\frac{n}{2}\right) + Kn \leqslant 9C\left(\frac{n}{4}\right) + 3K\frac{n}{2} + Kn \leqslant \cdots \\ &\leqslant 3^\ell C(1) + \left(\frac{(3/2)^\ell - 1}{3/2 - 1}\right)Kn = \mathrm{O}(3^\ell) = \mathrm{O}(n^{\log 3}).\end{aligned}$$

Plan

Mise en équation matricielle

À partir de

$$\boxed{q_r(n)s_{n+r} + \cdots + q_0(n)s_n = 0,}$$

on construit

$$S_n := \begin{pmatrix} s_n \\ \vdots \\ s_{n+r-1} \end{pmatrix}, \quad \text{qui vérifie} \quad S_{n+1} = \frac{1}{q_r(n)} M(n) S_n$$

$$\text{avec} \quad M(n) = \begin{pmatrix} 0 & q_r(n) & & & \\ & 0 & q_r(n) & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & q_r(n) \\ -q_{r-1}(n) & & \dots & & -q_0(n) \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{w_{n+r} = q_r(n) w_{n+r-1}, \qquad S_n = \frac{1}{w_n} \big(M(n-1) \dots M(0)\big) S_0, \qquad s_n = \frac{v_n}{w_n}.}$$

Borne sur les tailles

Borne sur les tailles $\rightarrow$ estimation des complexités.

Borne sur les tailles

Borne sur les tailles → estimation des complexités.

Théorème

La taille du numérateur et du dénominateur du n-ième terme d'une suite P-récursive donnée par une récurrence à coefficients dans $\mathbb{Q}[i][n]$ *et des conditions initiales dans* $\mathbb{Q}[i]$ *croît en* $O(n \log n)$.

Posons $M(n) = M_d n^d + \cdots + M_0$.
Soit $L \geqslant \|S_0\|_\infty, \|M_0\|_\infty, \ldots, \|M_d\|_\infty$.
Alors :

1. $\|M(n)\|_\infty \leqslant (d+1)Ln^d$,
2. $\|M(n-1)\ldots M(0)S_0\|_\infty \leqslant r^n(d+1)^n L^{n+1}(n!)^d$.

$|v_n| \leqslant \|w_n S_n\|_\infty \Rightarrow \lambda(v_n) = O(n \log n)$; idem pour w_n $(r = 1)$.

Complexité binaire de l'approche naïve

Algorithme naïf

Dérouler $q_r(n)s_{n+r} + \cdots + q_0(n)s_n = 0$ sous la forme

$$\begin{aligned} -v_{n+r} = {} & q_{r-1}(n)v_{n+r-1} \\ & + q_{r-2}(n)q_r(n-1)v_{n+r-2} \\ & + q_{r-2}(n)q_r(n-1)q_r(n-2)v_{n+r-3} \\ & + \cdots \\ & + q_0(n)q_r(n-1)\ldots q_r(n-r+1)v_n. \end{aligned}$$

Complexité = $\mathsf{O}\big(n^2\mathsf{I}(\log n)\big) \gg \mathsf{O}(n \log n)$ = taille de la sortie.

- n étapes ;
- chaque étape = $\mathsf{O}(1)$ multiplications déséquilibrées en tailles $\mathsf{O}(\log n) \times \mathsf{O}(n \log n)$.

Algorithme rapide par scindage binaire

Scindage binaire

Poser $P(b,a) := M(b-1)\dots M(a)$ pour $b \leqslant a$. Calculer récursivement

$M(n-1)\dots M(0) = P(n,0)$ par

$$P(b,a) = P(b,m)P(m,a) \qquad \text{avec} \qquad m = \lfloor (a+b)/2 \rfloor.$$

Algorithme rapide par scindage binaire

Scindage binaire

Poser $P(b,a) := M(b-1)\dots M(a)$ pour $b \leqslant a$. Calculer récursivement

$M(n-1)\dots M(0) = P(n,0)$ par

$$P(b,a) = P(b,m)P(m,a) \qquad \text{avec} \qquad m = \lfloor (a+b)/2 \rfloor.$$

Borne : $\lambda\big(P(b,a)\big) = \mathrm{O}(b\log b - a\log a)$

$$\|M(n)\|_\infty \leqslant (d+1)Ln^d \Rightarrow \|P(b,a)\|_\infty \leqslant ((d+1)L)^{b-a}\left(\frac{b!}{a!}\right)^d.$$

Algorithme rapide par scindage binaire

Scindage binaire

Poser $P(b,a) := M(b-1)\dots M(a)$ pour $b \leqslant a$. Calculer récursivement

$M(n-1)\dots M(0) = P(n,0)$ par

$$P(b,a) = P(b,m)P(m,a) \qquad \text{avec} \qquad m = \lfloor (a+b)/2 \rfloor.$$

Borne : $\lambda\big(P(b,a)\big) = \mathrm{O}(b\log b - a\log a)$

$$\big\|M(n)\big\|_\infty \leqslant (d+1)Ln^d \Rightarrow \big\|P(b,a)\big\|_\infty \leqslant \big((d+1)L\big)^{b-a}\left(\frac{b!}{a!}\right)^d.$$

Notation : $\lambda_n^\alpha := \lambda\big(\big\|P(n,(1-\alpha)n)\big\|_\infty\big)$. $\quad \lambda_n^\alpha = \mathrm{O}((1-\alpha)n\log n)$.

Complexité de l'algorithme rapide

Théorème

Le scindage binaire calcule $P(n,0)$ en complexité quasi-optimale $\mathsf{O}\big(\mathsf{I}(n\log n)\log n\big) \subseteq \tilde{\mathsf{O}}\big(\mathsf{I}(n)\big)$.

Complexité de l'algorithme rapide

Théorème

Le scindage binaire calcule $P(n,0)$ en complexité quasi-optimale $\mathsf{O}\big(\mathsf{I}(n \log n) \log n\big) \subseteq \tilde{\mathsf{O}}\big(\mathsf{I}(n)\big)$.

Récurrence sur le coût $C(b,a)$ du calcul de $P(b,a) = P(b,m)P(m,a)$:

$$C(b,a) \leqslant 2C(b,m) + \kappa\,\mathsf{I}\Big(\big\|\lambda(P(b,m))\big\|_\infty\Big).$$

Complexité de l'algorithme rapide

Théorème

Le scindage binaire calcule $P(n,0)$ en complexité quasi-optimale $\mathsf{O}\big(\mathsf{I}(n\log n)\log n\big) \subseteq \tilde{\mathsf{O}}\big(\mathsf{I}(n)\big)$.

Récurrence sur le coût $C(b,a)$ du calcul de $P(b,a) = P(b,m)P(m,a)$:

$$C(b,a) \leqslant 2C(b,m) + \kappa\,\mathsf{I}\big(\|\lambda(P(b,m))\|_\infty\big).$$

Simplification $a = 0$, $b = n = 2^\ell$:

$$C(n,0) \leqslant 2C\left(n,\frac{n}{2}\right) + \kappa\,\mathsf{I}\left(\lambda_n^{1/2}\right) \leqslant 4C\left(n,\frac{3n}{4}\right) + \kappa\,\mathsf{I}\left(\lambda_n^{1/2}\right) + 2\kappa\,\mathsf{I}\left(\lambda_n^{1/4}\right)$$

$$\leqslant \cdots \leqslant 2^iC\left(n,\frac{(2^i-1)n}{2^i}\right) + \kappa\,\mathsf{I}\left(\lambda_n^{1/2}\right) + \cdots + 2^{i-1}\kappa\,\mathsf{I}\left(\lambda_n^{1/2^i}\right)$$

$$\leqslant \cdots \leqslant 2^\ell C\left(n,\frac{n-1}{n}\right) + \ell\kappa\,\mathsf{I}\left(\lambda_n^{1/2}\right) = n\mathsf{O}(\log n) + \ell\mathsf{O}\big(\mathsf{I}(n\log n)\big).$$

Complexité de l'algorithme rapide

Théorème

Le scindage binaire calcule $P(n,0)$ en complexité quasi-optimale $\mathsf{O}\big(\mathsf{I}(n \log n) \log n\big) \subseteq \tilde{\mathsf{O}}\big(\mathsf{I}(n)\big)$.

Récurrence sur le coût $C(b,a)$ du calcul de $P(b,a) = P(b,m)P(m,a)$:

$$C(b,a) \leqslant 2C(b,m) + \kappa\,\mathsf{I}\big(\big\|\lambda(P(b,m))\big\|_\infty\big).$$

Simplification $a = 0$, $b = n = 2^\ell$:

$$\begin{aligned} C(n,0) &\leqslant 2C\left(n, \frac{n}{2}\right) + \kappa\,\mathsf{I}\left(\lambda_n^{1/2}\right) \leqslant 4C\left(n, \frac{3n}{4}\right) + \kappa\,\mathsf{I}\left(\lambda_n^{1/2}\right) + 2\kappa\,\mathsf{I}\left(\lambda_n^{1/4}\right) \\ &\leqslant \cdots \leqslant 2^i C\left(n, \frac{(2^i-1)n}{2^i}\right) + \kappa\,\mathsf{I}\left(\lambda_n^{1/2}\right) + \cdots + 2^{i-1}\kappa\,\mathsf{I}\left(\lambda_n^{1/2^i}\right) \\ &\leqslant \cdots \leqslant 2^\ell C\left(n, \frac{n-1}{n}\right) + \ell\kappa\,\mathsf{I}\left(\lambda_n^{1/2}\right) = n\mathsf{O}(\log n) + \ell\mathsf{O}\big(\mathsf{I}(n \log n)\big). \end{aligned}$$

Plan

Récurrence sur les sommes partielles

Soit $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k$ donnée par une ÉDL, et $\xi \in \mathbb{Q}[i]$ fixé.

→ ÉRL sur les coefficients u_k :

$$p_{r-1}(k)u_{k+r-1} + \cdots + p_0(k)u_k = 0\ ;$$

→ ÉRL sur les termes $u_k\xi^k$:

$$p_{r-1}(k)(u_{k+r-1}\xi^{k+r-1}) + \cdots + p_0(k)\xi^{r-1}(u_k\xi^k) = 0\ ;$$

→ ÉRL sur les sommes partielles $s_n := \sum_{k=0}^{n} u_k\xi^k$:

$$p_{r-1}(n)(s_{n+r} - s_{n+r-1}) + \cdots + p_0(n)\xi^{r-1}(s_{n+1} - s_n) = 0,$$

$$\boxed{q_r(n)s_{n+r} + \cdots + q_0(n)s_n = 0,}$$

où les q_i dépendent implicitement de ξ.

Croissances factorielle et exponentielle

Corollaire

La taille du numérateur et du dénominateur de la somme partielle de la série de Taylor tronquée à l'ordre n et évaluée en $\xi \in \mathbb{Q}[i]$ d'une fonction D-finie donnée par une ÉDL à coefficients dans $\mathbb{Q}[x]$ croît en $O(n \log n)$.

Croissances factorielle et exponentielle

Corollaire

La taille du numérateur et du dénominateur de la somme partielle de la série de Taylor tronquée à l'ordre n et évaluée en $\xi \in \mathbb{Q}[i]$ d'une fonction D-finie donnée par une ÉDL à coefficients dans $\mathbb{Q}[x]$ croît en $\mathrm{O}(n \log n)$.

Théorème (Poincaré (1885), Perron (1909, 1910, 1921), Kreuser (1914))

Pour une récurrence linéaire d'ordre strictement positif, non-singulière et réversible, il existe $\kappa, \alpha > 0$ et $d \in \mathbb{N}$ non nul tels que :

1. *Toute solution non asymptotiquement nulle croît en $\mathrm{O}(n^d \alpha^n n!^\kappa)$.*
2. *Il existe une solution vérifiant*

$$\limsup \left(\frac{u_n}{n!^\kappa}\right)^{1/n} \leqslant \alpha.$$

3. *Il y a génériquement égalité.*

Croissances factorielle et exponentielle

Corollaire

La taille du numérateur et du dénominateur de la somme partielle de la série de Taylor tronquée à l'ordre n et évaluée en $\xi \in \mathbb{Q}[i]$ d'une fonction D-finie donnée par une ÉDL à coefficients dans $\mathbb{Q}[x]$ croît en $\mathrm{O}(n \log n)$.

Théorème (Poincaré (1885), Perron (1909, 1910, 1921), Kreuser (1914))

Pour une récurrence linéaire d'ordre strictement positif, non-singulière et réversible, il existe $\kappa, \alpha > 0$ et $d \in \mathbb{N}$ non nul tels que :

1. *Toute solution non asymptotiquement nulle croît en $\mathrm{O}(n^d \alpha^n n!^\kappa)$.*
2. *Il existe une solution vérifiant*
$$\limsup \left(\frac{u_n}{n!^\kappa}\right)^{1/n} \leqslant \alpha.$$
3. *Il y a génériquement égalité.*

κ s'obtient en considérant le polygône de Newton de la récurrence.

Ordre de troncature pour un calcul rapide à 10^{-p} près

Sous les hypothèses $|u_k| \leqslant C k^d \alpha^k$ et $z < 1/\beta < 1/\alpha$,

$$|f(z) - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k z^k \right| \leqslant C \sum_{k=n+1}^{\infty} k^d \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^k |\beta z|^{n+1} \leqslant D |\beta z|^n.$$

Ainsi :

$$|f(z) - s_n| \leqslant 10^{-p} \Longleftarrow n \geqslant \frac{p \log 10 + \log D}{-\log |\beta z|} = \mathrm{O}(p).$$

Théorème (Chudnovsky$^{\times 2}$ (1988), Van der Hoeven (1999–), Mezzarobba & Salvy (2009–))

Le calcul de $f(z)$ à 10^{-p} près se fait en complexité binaire $\tilde{\mathrm{O}}(p)$.

Ordre de troncature pour un calcul rapide à 10^{-p} près

Sous les hypothèses $|u_k| \leqslant Ck^d\alpha^k$ et $z < 1/\beta < 1/\alpha$,

$$|f(z) - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k z^k \right| \leqslant C \sum_{k=n+1}^{\infty} k^d \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k |\beta z|^{n+1} \leqslant D|\beta z|^n.$$

Ainsi :

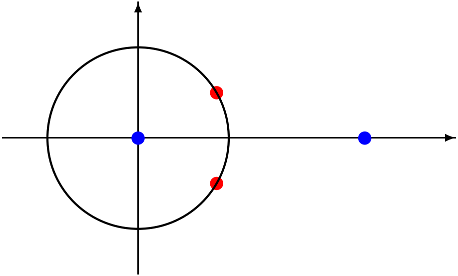
$$|f(z) - s_n| \leqslant 10^{-p} \Longleftarrow n \geqslant \frac{p \log 10 + \log D}{-\log|\beta z|} = \mathrm{O}(p).$$

Théorème (Chudnovsky$^{\times 2}$ (1988), Van der Hoeven (1999–), Mezzarobba & Salvy (2009–))

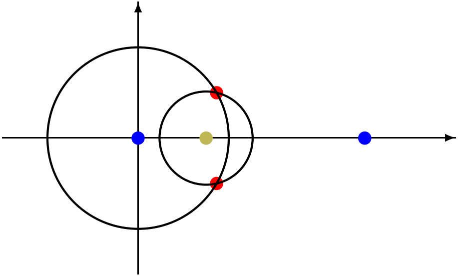
Le calcul de $f(z)$ à 10^{-p} près se fait en complexité binaire $\tilde{\mathrm{O}}(p)$.

Majoration efficaces par théorie effective des séries majorantes.

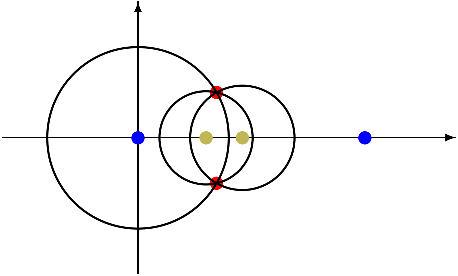
Prolongement analytique effectif



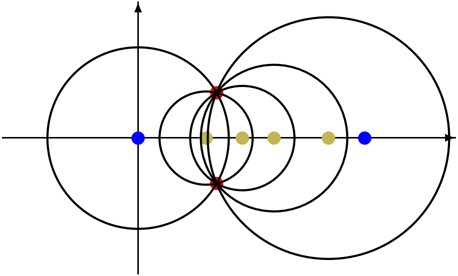
Prolongement analytique effectif



Prolongement analytique effectif

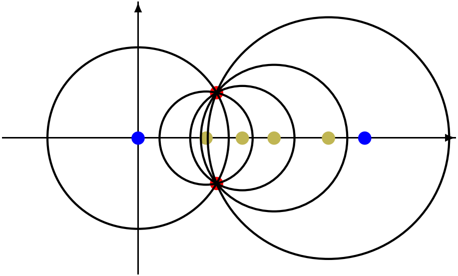


Prolongement analytique effectif



Chemin : $0 \to 1{,}5 \to 2{,}3 \to 3 \to 4{,}22 \to 5.$

Prolongement analytique effectif



Chemin : $0 \to 1{,}5 \to 2{,}3 \to 3 \to 4{,}22 \to 5$.

Pour les conditions initiales en ξ, évaluer f en $z = \xi + \epsilon$:

$$f(z) = f(\xi) + f'(\xi)\epsilon + \frac{1}{2}f''(\xi)\epsilon^2 + \cdots + \frac{1}{(r-1)!}f^{(r-1)}(\xi)\epsilon^{r-1} + \mathrm{O}(\epsilon^r).$$

Calculs avec $M(n) \in \mathcal{M}_r\big(\mathbb{Z}[i,\epsilon,n]/(\epsilon^r)\big) \simeq \mathcal{M}_r\big(\mathbb{Z}[i,n]\big)[\epsilon]/(\epsilon^r)$.
Même dépendance de la complexité en la précision p.

Conclusions

1. L'algorithmique des séries rapide et une mise en œuvre effective soignée de la théorie effective des séries majorantes fournit un algorithme d'évaluation numérique à la fois garanti et en temps quasi-linéaire en la précision visée.
2. Restent des cas plus difficiles :
   - $z \in \bar{\mathbb{Q}}$ ou z de grande hauteur : algorithme *bit burst* ;
   - singularités régulières : $\ln z$;
   - singularités essentielles : parties exponentielles + phénomènes de Stokes.
3. Génération de code C, Fortran ou autre.

Troisième partie

Où il sera question de web mathématique

Mathématiques sur le web : du statique au dynamique

Mathématiques actuelles sur le web = Livres de maths + Web :

- vérifiées par des humains, propices aux erreurs,
- présentation et contenu essentiellement statiques.

Exemples imposants :

- Le MathWorld de Wolfram,
- Le Digital Library of Mathematical Functions du NIST.

Cas particulier : Wolfram Alpha.

Notre but = Mathématiques dynamiques sur le web =

- contrôler interactivement des calculs incrémentaux,
- programmer la structure des pages web.

Systèmes de calcul formel

Les interfaces s'appuient toutes sur une syntaxe du calcul formel :

- shell (= un shell texte),
- GUI (= un shell graphique),
- en ligne (= un shell sur le web).

Exemples : les bloc-notes de Sage.

Nos buts :

- cacher la syntaxe des non-experts du calcul formel,
- pas seulement du calcul formel sur le web, mais aussi une interface programmable.

Dictionnaire en ligne des fonctions spéciales

Encyclopedia of Special Functions (ESF, 2001–2003)

ESF = Manuels mathématiques + Calcul formel + Web statique

Dynamic Dictionary of Special Functions (DDMF, 2008–)

DDMF = Manuels mathématiques + Calcul formel + Web interactif

Dynamic Mathematics on the Web (DynaMoW)

1. Génération dynamique de documents par le calcul formel
   $\longrightarrow$ Interactivité et calculs incrémentaux.
2. La trace du calcul symbolique fait partie de la sortie
   $\longrightarrow$ Écriture automatique de preuves / certification des résultats.
3. Extraction of code de calcul formel
   $\longrightarrow$ Bibliothèques de CF indépendantes.

DDMF = ESF + DynaMoW

Syntaxe DynaMoW pour le programmeur

Travail en cours → notation instable.

Librairie ocaml à base de quotations et d'antiquotations

```
let x = <:symb< expression symbolique >>
and n = 23 + <:int< expression symbolique calculant un entier >>
in
<:unit< définition d'une fonction symbolique f >> ;
let s = <:symb< f($(symb:x), $(int:n)) >>
in
<:doc< Début de la phrase <:imath< latex $(int:n) encore du latex >>
   milieu de la phrase
   <:imath< <:symb< expression symbolique >> = $(symb:s) >>
   fin de la phrase.
>>
```

Page web paramétrée = service web, typés par ocaml

```
DynaMoW.Services.register "SrvName" SrvName.run
...
SrvName.call v_1 v_2 ...
```

Résumé et conclusions

1. DDMF = Manuels mathématiques + Calcul formel + Web interactif ;
2. DynaMoW = ocaml + quotations + antiquotations ;
3. camlp4 ne type pas → trop d'annotations de types ;
4. Autre application codée en DynaMoW : *Encyclopedia of Combinatorial Structures (ECS)* ;
5. Enseignement/auto-enseignement en ligne ?

Quatrième partie

Où il sera question de sommes et d'intégrales

Plan

Exemples : Sommes et intégrales

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^3$$ Strehl (1992

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{i+j}{i}^2 \binom{4n-2i-2j}{2n-2i} = (2n+1) \binom{2n}{n}^2$$ Blodgelt (1990)

$$\int_0^{+\infty} x J_1(ax) I_1(ax) Y_0(x) K_0(x) \, dx = -\frac{\ln(1-a^4)}{2\pi a^2}$$ GlMo (1994)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1+2xy+4y^2) \exp\left(\frac{4x^2y^2}{1+4y^2}\right)}{y^{n+1}(1+4y^2)^{\frac{3}{2}}} \, dy = \frac{H_n(x)}{\lfloor n/2 \rfloor !}$$ Doetsch (1930

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} J_1(x) J_1(y) J_2(c\sqrt{xy}) \, \frac{dx\, dy}{e^{x+y}}$$ vérifient une ÉDL d'ordre 2

+ beaucoup, beaucoup d'autres, par exemple dans, 

.

Exemples : q-sommes, transformées intégrales et fonctions symmétriques

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{q^{k^2}}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k q^{(5k^2-k)/2}}{(q;q)_{n-k}(q;q)_{n+k}} \quad \text{Andrews (1974)}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{q^{(i+j)^2+j^2}}{(q;q)_{n-i-j}(q;q)_i (q;q)_j} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k q^{7/2k^2+1/2k}}{(q;q)_{n+k}(q;q)_{n-k}} \quad \text{Paule (1985)}$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{e^{-px} T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = (-1)^n \pi I_n(p)$$

$$\int_0^{+\infty} x e^{-px^2} J_n(bx) I_n(cx)\, dx = \frac{1}{2p} \exp\left(\frac{c^2-b^2}{4p}\right) J_n\left(\frac{bc}{2p}\right)$$

$$\Big\langle \exp\big((p_1^2 - p_2)/2 - p_2^2/4\big) \,|\, \exp\big(t(p_1^2+p_2)/2\big) \Big\rangle = \frac{e^{-\frac{1}{4}t(t+2)}}{\sqrt{1-t}}$$

Exemples : Sommes et intégrales non-« holonomes »

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i(k+i)^{k-1}(n-k+j)^{n-k} = (n+i+j)^n \quad \text{Abel (1826)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{m-k} k! \binom{n-k}{m-k} \left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = \left\langle {n \atop m} \right\rangle \quad \text{Frobenius (1910)}$$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_{n+k} = (-1)^{m+n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{m+k} \quad \text{Gessel (2003)}$$

$$\int_0^\infty x^{k-1} \zeta(n, \alpha + \beta x)\, dx = \beta^{-k} B(k, n-k) \zeta(n-k, \alpha)$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha - 1} \operatorname{Li}_n(-xy)\, dx = \frac{\pi(-\alpha)^n y^{-\alpha}}{\sin(\alpha\pi)}$$

$$\int_0^\infty x^{s-1} \exp(xy) \Gamma(a, xy)\, dx = \frac{\pi y^{-s}}{\sin\big((a+s)\pi\big)} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-a)}$$

« holonome » $\approx$ D-fini.

Deux idées — Plusieurs générations d'algorithmes

Idées

- Confinement en dimension vectorielle finie
  → clôtures (multivariées) sous les opérations algébriques
- Téléscopage créatif ($\approx$ dérivation sous le signe intégral)
  → clôtures sous $\int$, $\sum$, $\langle \dots | \dots \rangle$

Classes d'entrées

- (q-)hypergéométrique/hyperexponentielle : Zeilberger (1990), Paule & Schorn (1995) ; Riese (2003) ; Almkvist & Zeilberger (1990)
- équa. d'ordres supérieurs : Zeilberger (1990), Takayama (1989–90), Chyzak & Salvy (1998), Chyzak (2000)
- types Abel/Stirling/Euler et Bernoulli : Majewicz (1996) ; Kauers (2007) ; Chen & Sun (2009)
- les précédents et plus : Chyzak, Kauers & Salvy (2009)

Plan

Avant les exemples, rappelons …

La série hypergéométrique de Gauss,

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix}\middle| x\right) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \quad \text{pour} \quad u_n := \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!}, \quad \text{est solution de}$$

$$(\theta + c - 1)\theta(F) = x(\theta + a)(\theta + b)(F) \quad \text{pour } \theta := x\,\frac{d}{dx},$$

$$\text{car} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+1)}.$$

$$\theta^2(F) \in \langle F, \theta(F)\rangle \quad (\text{sur } \mathbb{Q}(a,b,c)(x))$$

Ceci se généralise à $${}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1, \dots, a_p\\ b_1, \dots, b_q\end{matrix}\middle| x\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n n!} x^n.$$

Clôtures algébriques par confinement vectoriel (1)

Rappel : $F = {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix}\middle|\, x\right) \Rightarrow \theta^2(F) \in \langle F, \theta(F)\rangle$ (sur $\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)(x)$).

Clôtures algébriques par confinement vectoriel (1)

Rappel : $F = {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix}\middle| x\right) \Rightarrow \theta^2(F) \in \langle F, \theta(F)\rangle \quad$ (sur $\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)(x)$).

Exemple d'un produit de séries génératrices : l'identité de Clausen,

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ a+b+1/2\end{matrix}\middle| x\right)^2 = {}_3F_2\left(\begin{matrix}2a,2b,a+b\\ 2(a+b),a+b+1/2\end{matrix}\middle| x\right).$$

Clôtures algébriques par confinement vectoriel (1)

Rappel : $F = {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix}\middle| x\right) \Rightarrow \theta^2(F) \in \langle F, \theta(F)\rangle$ (sur $\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)(x)$).

Exemple d'un produit de séries génératrices : l'identité de Clausen,

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\ a+b+1/2\end{matrix}\middle| x\right)^2 = {}_3F_2\left(\begin{matrix}2a, 2b, a+b\\ 2(a+b), a+b+1/2\end{matrix}\middle| x\right). $$

Preuve : Après avoir fait $f = g^2$,

1. $f \in \langle g^2\rangle$, $\theta(f) = 2g\theta(g) \in \langle g\theta(g)\rangle$,
   $\theta^2(f) \in \langle \theta(g)^2, g\theta^2(g)\rangle \subset \langle g^2, g\theta(g), \theta(g)^2\rangle =: V$,
   $\theta^3(f) \in \langle g^2, g\theta(g), \theta(g)^2, g\theta^2(g), \theta(g)\theta^2(g)\rangle \subset V$.
2. 4 vecteurs en dim. 3 $\rightarrow$ ÉDL d'ordre 3 pour f (confinement).
3. Même ÉDL pour la ${}_3F_2$ + coïncident jusqu'à $O(x^4)$ + th. de Cauchy.

Clôture algébrique par confinement vectoriel (2)

Exemple of la série génératrice d'un produit : identité de Mehler sur les polynômes de Hermite,

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)H_n(y)\frac{u^n}{n!} = \frac{\exp\left(\frac{4u(xy-u(x^2+y^2))}{1-4u^2}\right)}{\sqrt{1-4u^2}}.$$

Preuve :

1. Définissons les polynômes de Hermite $H_n(t)$ (D-finis sur $\mathbb{Q}(t)(n)$) : récurrence d'ordre 2 ;
2. Pour le produit, introduisons la base vectorielle sur $\mathbb{Q}(x,y)(n)$

$$\frac{H_n(x)H_n(y)}{n!}, \frac{H_{n+1}(x)H_n(y)}{n!}, \frac{H_n(x)H_{n+1}(y)}{n!}, \frac{H_{n+1}(x)H_{n+1}(y)}{n!}$$

$\rightarrow$ récurrence d'ordre au plus 4 ; (confinement)

3. Traduire en équation différentielle et résoudre.

Un confinement multivarié induit plusieurs relations

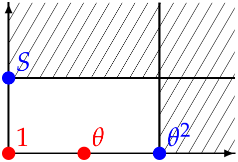
Exemple (Gauss, 1812) : La relation de contiguïté pour la série hypergéométrique,

$$F(a,x) := {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}\right| x\right) := \sum_{n=0}^{\infty} u_{a,n} x^n, \qquad u_{a,n} := \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!}.$$

$$\frac{u_{a,n+1}}{u_{a,n}} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} \to (1-x)\theta^2(F) = ((a+b)x + 1 - c)\theta(F) + abxF,$$

$$\frac{u_{a+1,n}}{u_{a,n}} = \frac{n}{a} + 1 \to S(F) := F(a+1,x) = \frac{1}{a}\theta(F) + F.$$

dim. $= 2 \Rightarrow S^2(F), S(F), F$ sont dépendants sur $\mathbb{Q}(b,c)(a,z)$:



$$(a+1)(x-1)S^2(F) + ((b-a-1)x + 2 - c + 2a)S(F) + (c-a-1)F = 0$$

Algèbres de Ore

Définition (Ore, 1933)

La bonne définition de $A\langle\partial\rangle$ pour que $\partial a = \sigma(a)\partial + \delta(a)$.

Soit un anneau A muni d'un endomorphisme σ et d'une σ-dérivation δ : $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$.
L'*anneau de polynômes tordus* $A\langle\partial;\sigma,\delta\rangle$ est la A-algèbre associative engendrée par ∂ et les relations $\partial a = \sigma(a)\partial + \delta(a),\ a \in A$.

Exemples : $\partial a = a\partial + da/dx$ dans $A\langle\partial;\mathrm{id},d/dx\rangle$; $\partial\big(a(n)\big) = a(n+1)\partial$ dans $A\langle\partial;S,0\rangle$.

Algèbres de Ore

Définition (Ore, 1933)

La bonne définition de $A\langle\partial\rangle$ pour que $\partial a = \sigma(a)\partial + \delta(a)$.

Soit un anneau A muni d'un endomorphisme σ et d'une σ-dérivation δ : $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$. L'*anneau de polynômes tordus* $A\langle\partial;\sigma,\delta\rangle$ est la A-algèbre associative engendrée par ∂ et les relations $\partial a = \sigma(a)\partial + \delta(a),\ a \in A$.

Exemples : $\partial a = a\partial + da/dx$ dans $A\langle\partial;\mathrm{id},d/dx\rangle$; $\partial\big(a(n)\big) = a(n+1)\partial$ dans $A\langle\partial;S,0\rangle$.

En itérant : $A\langle\partial_1;\sigma_1,\delta_1\rangle\langle\partial_2;\sigma_2,\delta_2\rangle \to \partial_2\partial_1 =?$.

Algèbres de Ore

Définition (Ore, 1933)

La bonne définition de $A\langle\partial\rangle$ pour que $\partial a = \sigma(a)\partial + \delta(a)$.
Soit un anneau A muni d'un endomorphisme σ et d'une σ-dérivation $\delta : \delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$. L'*anneau de polynômes tordus* $A\langle\partial;\sigma,\delta\rangle$ est la A-algèbre associative engendrée par ∂ et les relations $\partial a = \sigma(a)\partial + \delta(a),\ a \in A$.

Exemples : $\partial a = a\partial + da/dx$ dans $A\langle\partial; \mathrm{id}, d/dx\rangle$; $\partial\big(a(n)\big) = a(n+1)\partial$ dans $A\langle\partial; S, 0\rangle$.

En itérant : $A\langle\partial_1;\sigma_1,\delta_1\rangle\langle\partial_2;\sigma_2,\delta_2\rangle \to \partial_2\partial_1 =?$.

Définition (Chyzak & Salvy, 1998)

La bonne définition de $A\langle\partial_1,\dots,\partial_r\rangle$ pour que $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$.
Soit une k-algèbre commutative A muni d'endomorphismes $\sigma_1,\dots,\sigma_r$ et de morphismes k-linéaires $\delta_1,\dots,\delta_r$ tels que chaque δ_i soit une σ_i-dérivation, et vérifiant $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$, $\delta_i\delta_j = \delta_j\delta_i$, $\sigma_i\delta_j = \delta_j\sigma_i$ dès que $i \neq j$. L'*algèbre de Ore* $A\langle\partial_1,\dots,\partial_r;\sigma_1,\dots,\sigma_r,\delta_1,\dots,\delta_r\rangle$ est la A-algèbre associative engendrée par $\partial_1,\dots,\partial_r$ et les relations $\partial_i a = \sigma_i(a)\partial_i + \delta_i(a),\ a \in A,\ 1 \leqslant i \leqslant r$.

Exemple : $\mathbb{Q}(a,z)\langle\partial_1,\partial_2; S, \mathrm{id}, 0, D\rangle$.

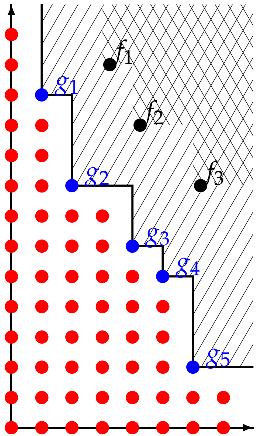
Cours accéléré sur les bases de Gröbner

Généralisent la division euclidienne et l'algorithme du p. g. c. d.

1. Ordre monomial : ordre total $\prec$ sur les monômes, compatible avec le produit, d'élément minimal 1
2. Base de Gröbner d'un idéal (à gauche) I par rapport à $\prec$: générateurs épousant l'escalier de I

$$\mathrm{BG}(f_1, f_2, f_3) = (g_1, \dots, g_5)$$

3. Quotient : base vectorielle sous l'escalier
4. Réduction de P modulo I : son reste unique écrit sur cette base



Bases de Gröbner : cas commutatif, cas tordu

Théorie algorithmique commutative

- Fondements : Hironaka (1964) ; Buchberger (1965)
- Améliorations algogithmiques : Faugère, Giani, Lazard & Mora (1993) ; Faugère F4 (1999), F5 (2002)
- Complexité : Bardet, Faugère & Salvy (2004), Bardet, Faugère, Salvy & Yang (2005)

Théorie algorithmique pour les opérateurs linéaires

- Précurseurs en différentiel : Galligo (1985), Takayama (1989, 1990)
- Cadre général : Kredel (1993) ; Chyzak & Salvy (1998)

Dimension des idéaux et fonctions ∂-finies

$$M_s(I) := \langle\, m : m \text{ est sous d'escalier et de degré total} \leqslant s \,\rangle$$

Théorème (Hilbert)

Pour tout I, il existe un entier $\delta(I)$ tel que $\operatorname{card} M_s(I) = O\big(s^{\delta(I)}\big)$.

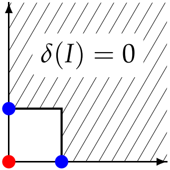
- $\delta(I)$ est la dimension (de Hilbert) de I.
- Mesure finie d'espaces vectoriels de dimension infinie.
- Peut être obtenue par un calcul de base de Gröbner.
- $I \subset J \Rightarrow \delta(I) \geqslant \delta(J)$

Définition (annulateur et ∂-finitude)

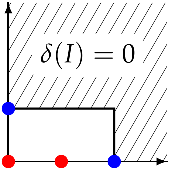
- $\operatorname{ann} f \subset \mathcal{R} = \{\, P \in \mathcal{R} : P(f) = 0 \,\}$
- f est ∂-finie $\Leftrightarrow$ dim. linéaire du quotient est finie $\Leftrightarrow$ $\delta(\operatorname{ann} f) = 0$

Exemples

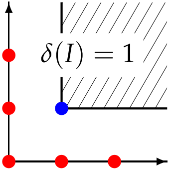
Coeffs du binôme $\binom{n}{k}$ p. r. à S_n, S_k ;
Suites hypergéométriques :



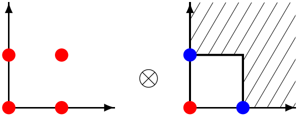
F. de Bessel $J_\nu(x)$ p. r. à S_ν, D_x ;
Polys orthogonaux p. r. à S_n, D_x :



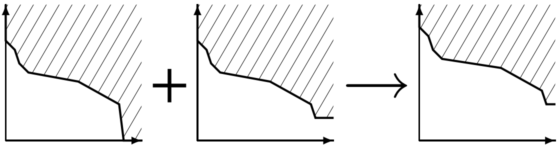
Nbs de Stirling p. r. à S_n, S_k :



Type « Abel » p. r. à S_m, S_k, S_r, S_s,
$\delta(I) = 2$



Propriétés de clôture



Proposition

$$\delta(\operatorname{ann}(f+g)) \leqslant \max\big(\delta(\operatorname{ann} f), \delta(\operatorname{ann} g)\big),$$
$$\delta(\operatorname{ann} fg) \leqslant \delta(\operatorname{ann} f) + \delta(\operatorname{ann} g), \quad \delta(\operatorname{ann} \partial f) \leqslant \delta(\operatorname{ann} f).$$

Algorithme (pour le produit fg) : pour un ordre *gradué*,

pour $s = 0, 1, 2, \dots,$ jusqu'à ce que $\delta(I) \leqslant$ borne :
  pour chaque $|\alpha| \leqslant s$, réduire $\partial^\alpha(fg)$ en une somme $\sum u_{\alpha;\beta,\gamma}(x)\partial^\beta(f)\partial^\gamma(g)$
   sur $\beta \in M_s(\operatorname{ann} f), \gamma \in M_s(\operatorname{ann} g)$
  chercher des relations $\mathbb{Q}(x)$-linéaires, fixer I à l'idéal qu'elles engendrent
 renvoyer I, un sous-idéal de $\operatorname{ann} fg$

Produit de nombres de Stirling de deuxième espèce

$\left\{ n \atop k \right\}$ et $\left\{ m \atop k \right\}$, donnés par $\delta(I_1) = \delta(I_2) = 1$:

$$\left\{ n+1 \atop k+1 \right\} = (k+1)\left\{ n \atop k+1 \right\} - \left\{ n \atop k \right\}, \quad \Delta_m \left\{ n \atop k \right\} = 0,$$
$$\Delta_n \left\{ m \atop k \right\} = 0, \quad \left\{ m+1 \atop k+1 \right\} = (k+1)\left\{ m \atop k+1 \right\} - \left\{ m \atop k \right\}.$$

$\left\{ n \atop k \right\}\left\{ m \atop k \right\}$: Calculs jusqu'à $s = 3 \to \binom{6}{3} = 20 > 19 = \dim M_3(I)$.

$$S_n S_m S_k - (k+1) S_n S_k - (k+1) S_m S_k + (k+1)^2 S_k - 1 \quad \to \quad \delta(I) = 2.$$

$$\left\{ n+1 \atop k+1 \right\}\left\{ m+1 \atop k+1 \right\} - (k+1)\left\{ n+1 \atop k+1 \right\}\left\{ m \atop k+1 \right\} - (k+1)\left\{ n \atop k+1 \right\}\left\{ m+1 \atop k+1 \right\}$$
$$+ (k+1)^2 \left\{ n \atop k+1 \right\}\left\{ m \atop k+1 \right\} - \left\{ n \atop k \right\}\left\{ m \atop k \right\} = 0.$$

Plan

Sommation par télescopage créatif, le prototype

But : évaluer $S_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ à 2^n.

Sommation par télescopage créatif, le prototype

$$\text{But : évaluer } S_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{ à } 2^n.$$

Étant donné la règle du triangle de Pascal,

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} - \binom{n}{k},$$

une sommation sur $k \in \mathbb{Z}$ fournit $S_{n+1} = 2S_n$.

La condition initiale $S_0 = 1$ conclut la preuve.

Téléscopage creatif, cas des sommes (Zeilberger, 1990)

$$U_n = \sum_{k=a}^{b} u_{n,k} = ?$$

Étant donné $A(n, S_n)$ et $B(n, k, S_n, S_k)$ tels que

$$\big(A(n, S_n) + \Delta_k B(n, k, S_n, S_k)\big)(u)(n, k) = 0,$$

une sommation mène par « télescopage » à

$$A(n, S_n)(U)(n) = \big[B(n, k, S_n, S_k)(u)(n, k)\big]_{k=a}^{k=b+1} \overset{\text{souvent}}{=} 0.$$

Ceci s'adapte aisément à $U(x) = \sum_{k=a}^{b} u_k(x)$.

Téléscopage créatif, cas des intégrales (Zeilberger, 1990)

$$U(x) = \int_a^b u(x,y)\,dy = \,?$$

Étant donné $A(x, D_x)$ et $B(x, y, D_x, D_y)$ tels que

$$\big(A(x, D_x) + D_y B(x, y, D_x, D_y)\big)(u)(x, y) = 0,$$

une intégration mène par « télescopage » à

$$A(x, D_x)(U)(x) = \big[B(x, y, D_x, D_y)(u)(x, y)\big]_{y=a}^{y=b} \overset{\text{souvent}}{=} 0.$$

Ceci s'adapte aisément à $U_n = \int_a^b u_n(y)\,dy$.

Télescopage créatif et intégration par parties

$$\text{Exemple : } U(x) := \int_0^1 \frac{\cos xy}{\sqrt{1-y^2}} dy = ? \qquad U'(x) = \int_0^1 -y \frac{\sin xy}{\sqrt{1-y^2}} dy,$$

$$U''(x) = \int_0^1 -y^2 \frac{\cos xy}{\sqrt{1-y^2}} dy = -U(x) + \int_0^1 \sqrt{1-y^2} \cos xy \, dy,$$

$$U''(x) + U(x) = \left[\sqrt{1-y^2} \frac{\sin xy}{x} \right]_{y=0}^{y=1} + \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \frac{\sin xy}{x} dy = -\frac{U'(x)}{x}.$$

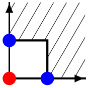
$$U''(x) + \frac{U'(x)}{x} + U(x) = \left[-\frac{1-y^2}{xy} D_x(u)(x,y) \right]_{y=0}^{y=1} = 0.$$

$$D_x^2 + \frac{1}{x} D_x + 1 + D_y \frac{1-y^2}{xy} D_x \in \operatorname{ann} u \quad \rightarrow \quad U(x) = J_0(x).$$

Téléscopage créatif = différences finies sous la somme + sommation par parties
Téléscopage créatif = différentiation sous l'intégrale + intégration par parties

Redécouverte de la règle du triangle de Pascal

Par la méthode de Fasenmyer (1945, 1947), réduisons tous les monômes de degré $\leqslant s = 2$ modulo ann $\binom{n}{k}$:



$$1 \to 1, \quad S_n \to \frac{n+1}{n+1-k}\,1, \quad S_k \to \frac{n-k}{k+1}\,1,$$

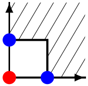
$$S_n^2 \to \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2-k)(n+1-k)}\,1, \quad S_k^2 \to \frac{(n-k-1)(n-k)}{(k+2)(k+1)}\,1, \quad S_nS_k \to \frac{n+1}{k+1}\,1.$$

Dénominateur commun : $D_2 = (k+1)(k+2)(n+1-k)(n+2-k)$.

$$D_2, D_2S_n, D_2S_k, D_2S_n^2, D_2S_k^2, D_2S_nS_k \text{ confinés dans } \mathbb{Q}(n)[k]_{\leqslant 4}$$
$$\to \quad D_2(S_nS_k - S_k - 1) \in \operatorname{ann} \binom{n}{k}.$$

Redécouverte de la règle du triangle de Pascal

Par la méthode de Fasenmyer (1945, 1947), réduisons tous les monômes de degré $\leqslant s = 2$ modulo ann $\binom{n}{k}$:



$$1 \to 1, \quad S_n \to \frac{n+1}{n+1-k}\,1, \quad S_k \to \frac{n-k}{k+1}\,1,$$

$$S_n^2 \to \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2-k)(n+1-k)}\,1, \quad S_k^2 \to \frac{(n-k-1)(n-k)}{(k+2)(k+1)}\,1, \quad S_nS_k \to \frac{n+1}{k+1}\,1.$$

Dénominateur commun : $D_2 = (k+1)(k+2)(n+1-k)(n+2-k)$.

$$D_2, D_2S_n, D_2S_k, D_2S_n^2, D_2S_k^2, D_2S_nS_k \text{ confinés dans } \mathbb{Q}(n)[k]_{\leqslant 4} \quad \to \quad D_2(S_nS_k - S_k - 1) \in \operatorname{ann}\binom{n}{k}.$$

$\deg D_s = O(s) \Rightarrow$ cela devait arriver pour un s assez grand.

Plus d'exemples et un contre-exemple

- $\dfrac{1}{n+k}$: essentiellement la même situation, confinement en dimension $\mathsf{O}(s)$.

- $\dfrac{1}{n^2+k^2}$: confinement dans un espace de dimension $\mathsf{O}(s^2)$, l'élimination de k n'aboutit pas.

- $f = \dfrac{a(x, y_1, \ldots, y_r)}{b(x, y_1, \ldots, y_r)}$: $D_s = b^{s+1}$, confinement dans un espace de dimension $\mathsf{O}(s^r)$ sur $K(x)$, l'élimination of $y_1, \ldots, y_r$ doit aboutir. Cas de base de la preuve que les fonctions D-finies sont « holonomes ».

Additionner une partie gauche et une partie droite

Spécification des algorithmes de télescopage créatif

Entrée : des générateurs d'ann f (ou d'un sous-idéal suffisant)
Sortie : toutes les (A, B) telles que :

- $A + \partial_y B \in \operatorname{ann} f$,
- A est indépendant de y et ∂_y

Algorithmes pour des classes spécifiques.
Renvoient souvent des résultats tronqués.

Définition (idéal télescopique de I par rapport à y)

$$T_y(I) := \left(I + \partial_y \mathcal{R}_{x,y}\right) \cap \mathcal{R}_x \quad \text{où}$$

$$\mathcal{R}_{x,y} := K(x,y)\langle \partial_x, \partial_y \rangle \text{ and } \mathcal{R}_x := K(x)\langle \partial_x \rangle.$$

Quand $I = \mathcal{R}_{x,y} G_1 + \cdots + \mathcal{R}_{x,y} G_\ell$, ceci fait intervenir

$$(\mathcal{R}_{x,y} G_1 + \cdots + \mathcal{R}_{x,y} G_\ell) + \partial_y \mathcal{R}_{x,y}.$$

Croissance polynomiale et télescopage créatif, $\delta > 0$

Définition (croissance polynomiale p)

Il existe une suite de polynômes $P_s(x, y)$, t.q. si $|a| + b \leqslant s$,

$$P_s \partial_{x_1}^{a_1} \dots \partial_{x_k}^{a_k} \partial_y^b \text{ se réduit à des polys de degré } \mathrm{O}(s^p) \text{ in } y.$$

Remarque : $p = 1$ dans le cadre classique.

Croissance polynomiale et télescopage créatif, $\delta > 0$

Définition (croissance polynomiale p)

Il existe une suite de polynômes $P_s(x, y)$, t.q. si $|a| + b \leqslant s$,
$$P_s \partial_{x_1}^{a_1} \dots \partial_{x_k}^{a_k} \partial_y^b \text{ se réduit à des polys de degré } \mathrm{O}(s^p) \text{ in } y.$$

Remarque : $p = 1$ dans le cadre classique.

Théorème (Chyzak, Kauers & Salvy, 2009)

$$\delta(T_y(I)) \leqslant \max\big(\delta(I) + p - 1, 0\big).$$

Preuve : $\qquad P_s \partial_x^a \partial_y^b - \sum_{\beta \in M_s(I)} (\text{deg. en } y \leqslant \mathrm{O}(s^p)) \partial^\beta \in I$

$\Rightarrow$ tout choix $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_{\delta(I)+p}}, \partial_y$ est algébriquement dépendant modulo $I \Rightarrow \delta(T_y(I)) \leqslant \delta(I) + p - 1$.

Croissance polynomiale et télescopage créatif, $\delta > 0$

Définition (croissance polynomiale p)

Il existe une suite de polynômes $P_s(x, y)$, t.q. si $|a| + b \leqslant s$,
$P_s \partial_{x_1}^{a_1} \dots \partial_{x_k}^{a_k} \partial_y^b$ se réduit à des polys de degré $\mathrm{O}(s^p)$ in y.

Remarque : $p = 1$ dans le cadre classique.

Théorème (Chyzak, Kauers & Salvy, 2009)

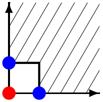
$$\delta(T_y(I)) \leqslant \max\bigl(\delta(I) + p - 1, 0\bigr).$$

Preuve : $P_s \partial_x^a \partial_y^b - \sum_{\beta \in M_s(I)} (\text{deg. en } y \leqslant \mathrm{O}(s^p)) \partial^\beta \in I$
$\Rightarrow$ tout choix $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_{\delta(I)+p}}, \partial_y$ est algébriquement dépendant modulo $I \Rightarrow \delta(T_y(I)) \leqslant \delta(I) + p - 1$.

Corollaire (condition sufficiente pour le télescopage créatif)

$\delta(I) + p - 1 < k \Rightarrow$ *des identités existent pour la somme/int. p. r. à y.*

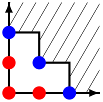
Exemples de croissance polynomiale $p = 1$



- Hypergéométrique propre (Wilf & Zeilberger, 1992) :

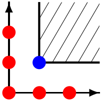
$$Q(n,k)\xi^k \frac{\prod_{i=1}^{u} (a_i n + b_i k + c_i)!}{\prod_{i=1}^{v} (u_i n + v_i k + w_i)!},$$

  Q un polynôme, a_i, b_i, u_i, v_i des entiers.



- Differentiel D-finie (cas particulier d'« holonomie »).
- Stirling : $\delta = 1 \rightarrow$ pour $\geqslant 3$ vars, e.g., Frobenius :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{m-k} k! \binom{n-k}{m-k} \left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = \left\langle {n \atop m} \right\rangle .$$



- Type « Abel » : $\delta = 2 \rightarrow$ pour $\geqslant 4$ vars, par exemple Abel :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i(k+i)^{k-1}(n-k+j)^{n-k} = (n+i+j)^n.$$

Algorithme I : À la Fasenmyer

Croissance polynomiale + algèbre linéaire $\rightarrow J := I \cap \mathcal{R}_x[\partial_y]$.

Algorithme

Pour des valeurs croissantes de s, jusqu'à ce que $\delta(J) \leqslant$ borne :

1. Reduire tous les $\partial_x^a \partial_y^b$ tels que $a + b \leqslant s$;
2. Normaliser au dénominateur commun ;
3. Système linéaire qui annule les puissances positives strictes de y ;
4. Si une solution non nulle est trouvée, elle a la forme $A(x, \partial_x) + \partial_y B(y, \partial_x, \partial_y)$; l'ajouter à J.

Ceci calcule A dans

$$(J + \partial_y \mathcal{R}_x[\partial_y]) \cap \mathcal{R}_x, \quad \text{pas dans} \quad T_t(I) := (I + \partial_y \mathcal{R}_{x,y}) \cap \mathcal{R}_x.$$

$$\mathcal{R}_x = K(x)\langle \partial_x \rangle \subset \mathcal{R}_x[\partial_y] \subset \mathcal{R}_{x,y} := K(x,y)\langle \partial_x, \partial_y \rangle.$$

Algorithme II. À la Zeilberger/Chyzak

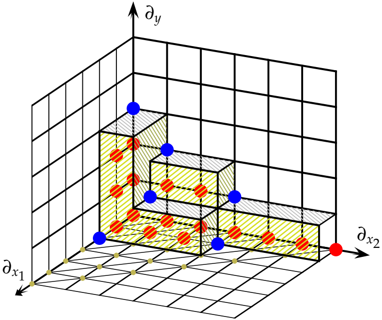
Calculer A dans $T_t(I) := (I + \partial_y \mathcal{R}_{x,y}) \cap \mathcal{R}_x$. $\leftrightarrow$ plus rapide, plus précis.

1. (q-)hypergéométrique : Zeilberger 1990 (impl. : Schorn, Riese).
2. ∂-fini ($\delta = 0$) : Chyzak 2000 (impl. : Koutschan, Pech).
3. non ∂-fini ($\delta > 0$) : Chyzak, Kauers & Salvy 2009.

Algorithme II. À la Zeilberger/Chyzak

Calculer A dans $T_t(I) := (I + \partial_y \mathcal{R}_{x,y}) \cap \mathcal{R}_x$. ↔ plus rapide, plus précis.

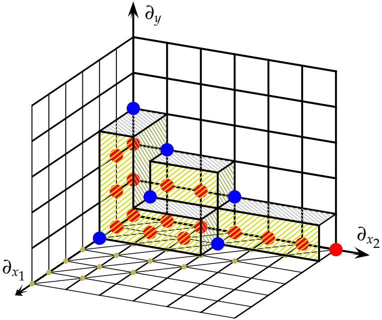
1. (q-)hypergéométrique : Zeilberger 1990 (impl. : Schorn, Riese).
2. ∂-fini ($\delta = 0$) : Chyzak 2000 (impl. : Koutschan, Pech).
3. non ∂-fini ($\delta > 0$) : Chyzak, Kauers & Salvy 2009.



Algorithme II. À la Zeilberger/Chyzak

Calculer A dans $T_t(I) := (I + \partial_y \mathcal{R}_{x,y}) \cap \mathcal{R}_x$. $\leftrightarrow$ plus rapide, plus précis.

1. (q-)hypergéométrique : Zeilberger 1990 (impl. : Schorn, Riese).
2. ∂-fini ($\delta = 0$) : Chyzak 2000 (impl. : Koutschan, Pech).
3. non ∂-fini ($\delta > 0$) : Chyzak, Kauers & Salvy 2009.



pour $s = 0, 1, 2, \ldots$, jusqu'à ce que $\delta(J) \leqslant$ borne :
faire $A := \sum_{|\alpha| \leqslant s} \eta_\alpha(x) \partial^\alpha$ pour des coeffs indéterminés $\eta_\alpha(y) \in K(x)$
faire $B := \sum_{\beta \in M_s(I)} \phi_\beta(x,y) \partial^\beta$ pour des coeffs indéterminés $\phi_\beta(y) \in K(x,y)$
réduire $A - \partial_y B$ sur la base $M_s(I)$
extraire les coeffs pour former un système linéaire du premier ordre p. r. à ∂_y
résoudre et fixer J à l'idéal des A
renvoyer les paires (A, B)

Plan

Résumé : trois idées

Confinement (en e. v. de dim. finie, en modules de dim. > 0)

Les dérivées d'« ordres supérieurs », $\partial^s(f)$, se récrivent comme des combinaisons linéaires d'un ensemble d'un ensemble spécifique de dérivées de « petit ordre », $\partial^a(f)$, $a \in A$.

Plus de card A dérivées $\to$ équation(s) $\to$ clôtures.

Croissance polynomiale (borne sur le degré des coeffs des formes normales)

$$i \leqslant s \quad \Rightarrow \quad \partial^i(f) = \frac{1}{P_s} \sum_{a \in A} (\text{degré en } y \leqslant \mathrm{O}(s^p))\partial^a(f)$$

p suffisamment petit $\to$ équation(s) libre(s) de y.

Téléscopage créatif ($\approx$ dériv. sous le signe int. + int. par parties)

Équation libre de y $\to$ équation sur intégrale/somme p. r. à y.

Élimination polynomiale tordue ou autres approches.

Conclusion

- L'approche :
  dim. d'entrée + croissance polynomiale $\rightarrow$ dim. de sortie ;
- Résolution en solutions rationnelles passée sous silence ;
- Sommation et intégration multiple ;
- Bornes $\rightarrow$ identités + leurs tailles + complexité des algorithmes.
- Questions ouvertes :
  - Approche guidée par la série de Hilbert doit être possible.
  - Remplacer la croissance polynomiale par quelque chose d'intrinsèque ;
  - Exploiter les symétries ;
  - Approximants de Hermite–Padé structurés ;
  - Comprendre la non-minimalité ;
  - Preuve automatique ?
  - Formules générales à nombre de sommes/intégrales variable ?