NEUROBIOLOGIE
Comment le cerveau régule l'appétit

MATHÉMATIQUES
Promenades sur un échiquier infini

MÉTÉOROLOGIE
Le jet-stream est-il déréglé ?

POUR LA SCIENCE

Mars 2015 - n° 449 | www.po

Édition française de Scientific American

LA VIE AILLEURS

Des milliards de planètes superhabitables

M 02687 - 449 - F: 6,20 € - RD

Compter les excursions sur un échiquier

Alin Bostan et Kilian Raschel

Le dénombrement des chemins allant d'un point à un autre d'un réseau est un problème mathématique difficile. Illustration avec le cas des marches dites de Gessel, récemment résolu.

Imaginons un échiquier s'étendant à l'infini dans les directions Est et Nord. Supposons que le roi, un « roi biaisé », puisse se déplacer d'une case vers l'Est, l'Ouest, le Sud-Ouest ou le Nord-Est *(voir la figure page 43)*. Si ce roi part du coin inférieur gauche de l'échiquier, combien existe-t-il de chemins possibles qui le font revenir à son point de départ en n coups, n étant un entier positif fixé ? En 2001, Ira Gessel, mathématicien de l'Université Brandeis aux États-Unis, conjectura une formule donnant ce nombre de possibilités en fonction de n.

Depuis l'énoncé de cette conjecture jusqu'à sa première preuve en 2008, qui utilisait de façon cruciale la puissance des ordinateurs, puis sa première démonstration purement humaine en 2013, beaucoup de mathématiciens se sont confrontés à ce problème par des approches très différentes.

Mais tout d'abord, pourquoi compter des chemins ? Depuis quand le faisons-nous ? Un exemple historique est le problème de la partie interrompue *(voir l'encadré page 42)*, posé au XVIIe siècle par le Chevalier de Méré à Blaise Pascal, et dont la solution proposée par ce dernier consiste à compter différents chemins (dans un « arbre de probabilités », dirait-on aujourd'hui en classe de terminale S).

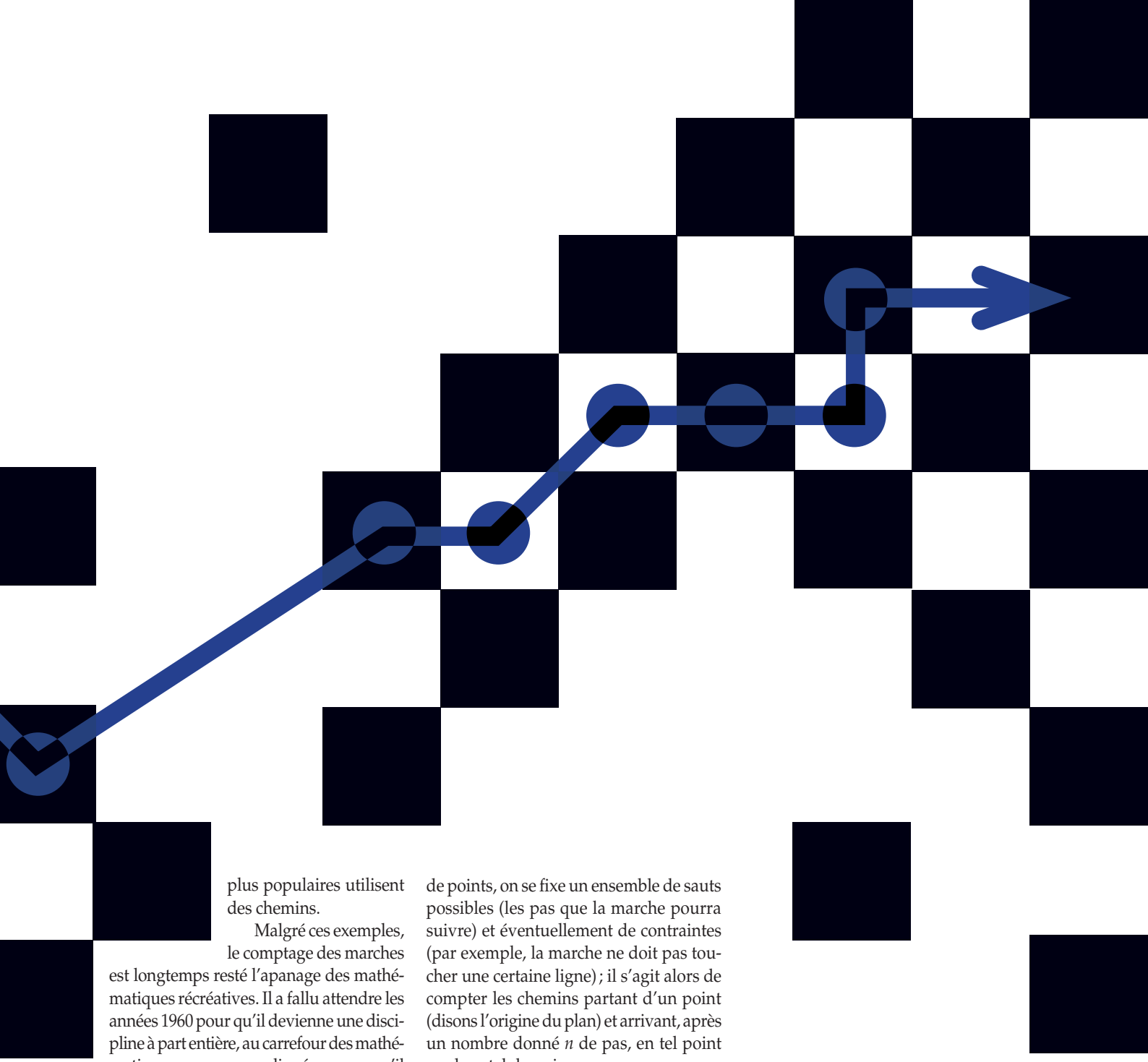
Si c'est son application aux jeux de hasard qui intéressait le Chevalier de Méré, ce problème a une portée plus générale. Il était déjà apparu en Italie au XIVe siècle, pour modéliser la rupture de contrats entre marchands associés dans une entreprise risquée.

Plus récemment, au XIXe siècle, le dénombrement des chemins a permis de résoudre le « problème du scrutin » : lors du dépouillement (dans un ordre aléatoire) d'une élection avec deux candidats A et B, où A gagne avec un nombre de a votes sur un total de $(a + b)$ votes, quelle est la probabilité que A reste en tête tout au long du dépouillement ? On peut prouver par différentes méthodes que cette probabilité vaut $(a-b)/(a+b)$; or les deux démonstrations les

L'ESSENTIEL

- **Dénombrer des chemins sur un réseau périodique est un problème qui apparaît dans des domaines scientifiques variés.**
- **Les situations où l'on a pu trouver une formule exacte sont rares.**
- **Pour un type de marches, une formule a été conjecturée par le mathématicien Ira Gessel en 2001.**
- **Cette conjecture a été prouvée à l'aide de calculs par ordinateur en 2008, puis sans cette aide en 2013.**

© Pour la Science - n° 449 - Mars 2015



plus populaires utilisent des chemins.

Malgré ces exemples, le comptage des marches est longtemps resté l'apanage des mathématiques récréatives. Il a fallu attendre les années 1960 pour qu'il devienne une discipline à part entière, au carrefour des mathématiques, pures ou appliquées, parce qu'il utilise des méthodes variées : algébriques, combinatoires, analytiques, probabilistes, etc. Soulignons aussi que le dénombrement de chemins intervient dans de nombreux modèles (magnétisme, physique des polymères, etc.) étudiés en physique statistique.

Le cas particulier du comptage des chemins dans le plan est doublement important : d'abord pour lui-même, et aussi parce qu'il constitue un modèle-jouet, c'est-à-dire un exemple dont la complexité paraît maîtrisable, et qui aide à tester de nouvelles idées avant de traiter un cas plus général, en trois dimensions par exemple.

Le problème est le suivant. On considère le plan comme un réseau périodique de points, on se fixe un ensemble de sauts possibles (les pas que la marche pourra suivre) et éventuellement de contraintes (par exemple, la marche ne doit pas toucher une certaine ligne) ; il s'agit alors de compter les chemins partant d'un point (disons l'origine du plan) et arrivant, après un nombre donné n de pas, en tel point ou dans tel domaine.

Dans la suite, on s'intéressera surtout au nombre e_n d'excursions de longueur n, c'est-à-dire de chemins formés de n pas partant de l'origine et y revenant. Pour les chemins non contraints, ce problème est facile et sa solution est connue depuis longtemps. Quant aux chemins contraints, différents cas ont été explorés : ne pas toucher une ligne, rester dans un demi-plan, dans un quart de plan, dans une région du plan avec des contours plus compliqués, etc. En fait, il existe une infinité d'exemples possibles. Dans la plupart des cas, le problème est hors de portée ; c'est pourquoi on se restreint souvent à la classe particulière des marches à petits sauts – composées

En géométrie, il n'y a pas de chemin réservé aux rois.

Euclide

Le problème de la partie interrompue

Deux joueurs jouent à pile ou face, le gagnant étant celui qui remporte trois parties ; chacun a misé au départ la même somme d'argent *m*. On suppose que le jeu est interrompu avant que l'un des deux joueurs ait remporté trois victoires et, de ce fait, la totalité des mises, soit 2*m*.

Comment, dans ces circonstances, doit-on partager cette somme ?

La solution proposée par Pascal consiste à compter les chemins, au sens d'énumérer les différentes possibilités.

Supposons que le jeu s'arrête alors qu'un des joueurs a gagné deux parties et l'autre une seule partie (situation notée 2/1). Si le jeu avait continué, il y aurait eu deux possibilités : la situation 2/2, pour laquelle il aurait été équitable de partager équitablement la mise (chacun *m*), et la situation 3/1, pour laquelle le premier joueur aurait tout emporté (2*m*). En faisant la moyenne (chaque événement étant équiprobable) on trouve qu'il est légitime que le premier joueur gagne 3*m*/2 et le deuxième *m*/2.

On procède de façon analogue si la situation initiale est différente de 2/1.

uniquement de déplacements aux plus proches voisins – dans des domaines angulaires simples.

L'un des premiers exemples est la marche dite de Kreweras, où les déplacements se font dans un quadrant (un quart de plan) et uniquement dans les directions Ouest, Sud et Nord-Est *(voir la figure page 45)*. Cette marche tire son nom du mathématicien français Germain Kreweras (1918-1998) qui, en 1965, parvint (en une preuve longue de plusieurs dizaines de pages !) à compter les excursions : il prouva que $e_{3n} = 4^n/[(n+1)(2n+1)]\,C_{3n}^n$, où les $C_p^k = p!/[k!\,(p-k)!]$ sont les coefficients du binôme, c'est-à-dire les coefficients de $x^k y^{p-k}$ dans le développement de $(x+y)^p$.

Une formule qui compte

Un autre cas particulier populaire est la marche dite simple, où les directions des pas sont les quatre points cardinaux : en 1921, le Hongrois George Pólya montra que, sur un échiquier infini dans toutes les directions, la probabilité qu'un roi exécutant une marche simple retourne à la case départ au bout d'un nombre fini de pas est égale à 1. Il existe aussi des formules pour le nombre d'excursions restreintes à un demi-plan ou à un quart de plan *(voir la figure page 46)*. Et en 1986, Dominique Gouyou-Beauchamps, informaticien à l'Université Paris-Sud, obtint une formule pour le domaine angulaire d'ouverture 45°, domaine qui se ramène au quart de plan par une transformation simple.

C'est dans ce contexte que Ira Gessel énonça sa conjecture. Selon celle-ci, le nombre de possibilités pour que le roi biaisé parte du coin inférieur gauche de l'échiquier et y revienne après 2*n* étapes (il ne peut revenir à l'origine en un nombre impair de pas) est égal à $e_{2n} = 4^n A_n B_n$, où $A_n = (2-5/5)(2-5/8)(2-5/11)\cdots[2-5/(3n+2)]$ et $B_n = (2-3/2)(2-3/3)(2-3/4)\cdots[2-3/(n+1)]$. (Le fait même que le produit $4^n A_n B_n$ soit un nombre entier n'est pas une évidence !)

Par exemple, pour $n = 1$, ce nombre vaut $e_2 = 4^1(2-5/5)(2-3/2) = 2$. Pour $n = 2$, on obtient : $e_4 = 4^2(2-5/5)(2-5/8)(2-3/2)(2-3/3) = 11$. Et pour $n = 3$, la même formule donne $e_6 = 85$. On peut retrouver ces résultats relatifs aux petites valeurs de *n* en énumérant de façon exhaustive, sur un dessin, les chemins. Notons par ailleurs qu'on peut voir la marche de Gessel comme la marche simple dans un domaine d'angle égal à 135 degrés *(voir la figure page 46)* ; c'est ainsi que Ira Gessel parvint à sa conjecture.

Jusqu'ici, nous nous sommes intéressés à la question de trouver des formules qui comptent certains chemins dans le plan. Une telle formule n'existant pas toujours, on peut alors poser une autre question, d'ordre plus qualitatif. Les nombres d'excursions e_n satisfont-ils une relation de récurrence *(voir l'encadré page 43)* ? Une telle relation entre des nombres permet souvent de mieux les connaître et les calculer, ou d'en trouver des approximations utiles.

Kreweras a montré que les excursions de la marche éponyme satisfont à une équation de récurrence linéaire ; d'autres marches présentent aussi cette propriété. Mais ce n'est pas toujours le cas, comme l'ont montré en 2003 Mireille Bousquet-Mélou, de l'Université de Bordeaux, et Marko Petkovšek, de l'Université de Lubiana en Slovénie, sur l'exemple du déplacement d'un cavalier aux échecs sur un échiquier s'étendant à l'infini dans les directions Est et Nord. À l'époque où Ira Gessel a énoncé sa conjecture, la plupart des spécialistes de combinatoire pensaient que les nombres d'excursions de Gessel ne vérifient pas de relation de récurrence linéaire.

En avril 2001, Ira Gessel partagea sa conjecture pour la première fois, en l'envoyant par courriel à Mireille Bousquet-Mélou. Cette dernière s'intéressait à l'époque aux marches dans un quart de plan, en lien avec la question de l'existence de relations de récurrence. Un peu plus

LES AUTEURS

Alin BOSTAN est chercheur à l'Inria, à Saclay près de Paris. Kilian RASCHEL est chercheur au CNRS et travaille au Laboratoire de mathématiques et physique théorique à l'Université de Tours.

© Pour la Science - n° 449 - Mars 2015

tard, en 2002, elle posa les fondements d'une approche permettant de compter les marches dans un quart de plan au moyen de « fonctions génératrices » – fonctions qui, lorsqu'on les exprime sous forme de séries, codent les informations recherchées dans les coefficients de ces séries *(voir l'encadré page 44)*. Ainsi, la fonction génératrice des excursions a pour développement une série dont les coefficients correspondent aux nombres d'excursions e_n pour toutes les valeurs de n.

Équation fonctionnelle

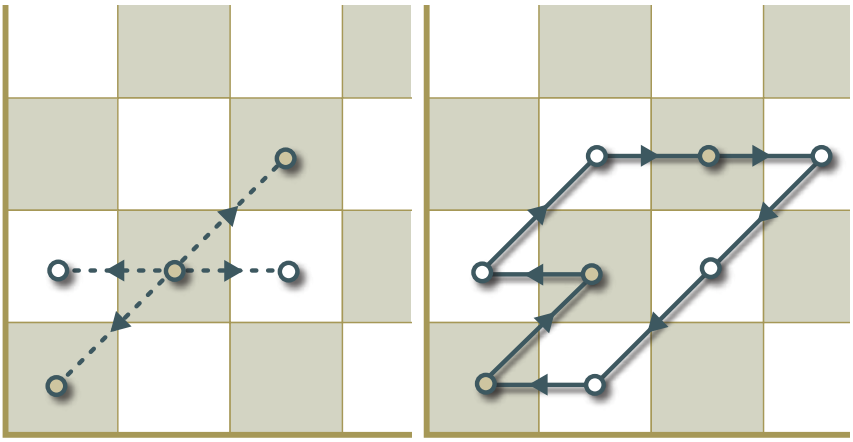
L'approche de Mireille Bousquet-Mélou est fondée sur une équation, dite fonctionnelle, assez simple satisfaite par la fonction génératrice et qui traduit la décomposition naturelle de toute marche de longueur $(n+1)$ en une marche de longueur n à laquelle s'ajoute un dernier pas. Le cœur du travail consistait notamment à déterminer la fonction génératrice à partir de l'équation fonctionnelle qu'elle doit satisfaire. Cette approche s'est révélée la bonne : toutes les autres utilisent comme point de départ les fonctions génératrices et l'équation fonctionnelle.

Mireille Bousquet-Mélou et Marni Mishna, de l'Université Simon Fraser au Canada, ont alors entrepris une étude systématique des marches à petits sauts dans un quadrant. Il existe *a priori* $2^8 = 256$ modèles, car on peut choisir d'inclure ou non chacun des huit plus proches voisins comme pas intervenant dans la marche (soit deux choix possibles par proche voisin). Les deux chercheuses ont d'abord montré qu'en fait, seuls 79 des 256 modèles sont intrinsèques au quart de plan et sont fondamentalement différents. En effet, certains des $256 - 79 = 177$ modèles restants sont triviaux (tel celui de la marche immobile), d'autres sont symétriques entre eux et, enfin, certains sont équivalents à des modèles de marches évoluant dans un demi-plan, bien compris depuis des travaux antérieurs.

Les études de Mireille Bousquet-Mélou et Marni Mishna se sont ainsi conclues par un article fondateur de la combinatoire des marches dans un quart de plan, qui résout 22 des 79 cas irréductibles. Pourquoi 22 ? Parmi les 79 cas, 23 (dont la marche simple, celles de Kreweras, de Gouyou-Beauchamps, de Gessel) sont particuliers au sens où un certain groupe, structure algébrique qui traduit généralement une certaine symétrie du modèle, est fini (c'est-à-dire constitué d'un nombre fini d'éléments). L'unique cas non résolu et associé à un groupe fini était précisément celui de la marche de Gessel !

La marche de Gessel était le dernier cas non résolu d'une famille de 23 marches associées à un groupe fini.

L'histoire de la résolution de la conjecture de Gessel débute le 28 janvier 2008, lors d'un séminaire organisé par l'équipe *Algorithms* de l'Inria à Rocquencourt, et auquel participaient Marni Mishna et Manuel Kauers, postdoctorant à l'époque. Ce dernier y mentionna des avancées récentes, obtenues en collaboration avec Doron Zeilberger, de l'Université Rutgers aux États-Unis, sur une approche par ordinateur consistant à deviner et prouver automatiquement des équations de récurrence.



POUR LES MARCHES DE GESSEL, les déplacements élémentaires autorisés sont d'une case vers l'Est, l'Ouest, le Nord-Est ou le Sud-Ouest *(à gauche)*. La conjecture de Gessel portait sur le nombre e_n d'excursions en fonction du nombre n de pas *(à droite, une excursion de huit pas)*.

Les suites récurrentes

Une suite définie par récurrence est une suite donnée par son premier terme (ou quelques-uns de ses premiers termes) et par une relation permettant de calculer chaque terme à partir du précédent (ou des quelques précédents).

L'ordre de la suite récurrente est le nombre de termes précédents dont on a besoin. Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = 16^n$ est récurrente d'ordre 1, avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 16\,u_n$. Un exemple légèrement plus complexe est la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = (n+1)\,v_n$ (d'ordre 1 également). La solution est ici la factorielle, notée $n\,!$, qui est le produit de tous les entiers allant de 1 à n. Un dernier exemple célèbre est la suite de Fibonacci (w_n), définie par $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ et $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$ (récurrence d'ordre 2). Rappelons que cette suite est reliée au nombre d'or $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$, car on peut montrer que $w_n = (\phi^n - (-1/\phi)^n)/\sqrt{5}$. Les suites récurrentes vérifiées par les nombres de marches évoquées dans cet article peuvent être d'ordre bien supérieur à 1 ou 2.

Un site web impressionnant, contenant des centaines de milliers de suites apparaissant en combinatoire, est l'encyclopédie en ligne de Neil Sloane (www.oeis.org).

Séries et fonctions génératrices

Une série génératrice est une « somme infinie » (plus rigoureusement, une *série formelle*) $S = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ dont les coefficients a_n constituent la suite de nombres que l'on recherche ; on dit que la série S est associée à la suite (a_n), ou que S est sa série génératrice.

Ces séries furent introduites par le mathématicien français Abraham de Moivre en 1730, afin d'obtenir des formules explicites pour des suites définies par récurrence.

Il est souvent possible d'étudier une suite donnée à l'aide de manipulations formelles de la série génératrice S associée, ainsi qu'en utilisant les propriétés de la fonction $f(x)$ qui représente la somme de la série S.

À titre d'exemple, précisons la fonction génératrice de chacune des trois suites mentionnées dans l'encadré portant sur les suites récurrentes *(voir page 43)*, à savoir les suites de terme général égal respectivement à $u_n = 16^n$, $v_n = n\,!$ et $w_n = (\phi^n - (-1/\phi)^n)/\sqrt{5}$ (suite de Fibonacci).

Pour la suite (u_n), il s'agit de $f(x) = 1/(1 - 16x)$, car une écriture alternative de $1/(1 - 16x)$ est $1 + 16x + 16^2x^2 + 16^3x^3 + \cdots$, qui est la série génératrice de (u_n) (on a utilisé l'identité $1/(1-a) = 1 + a + a^2 + \cdots$, valable pour tout nombre a de valeur absolue inférieure à 1).

La fonction génératrice de $(1/v_n) = (1/n\,!)$ – qui est plus remarquable et facile à définir que celle de (v_n) – est la fonction exponentielle $f(x) = e^x$, dont le développement en série est en effet $1 + x + x^2/2\,! + x^3/3\,! + \cdots$

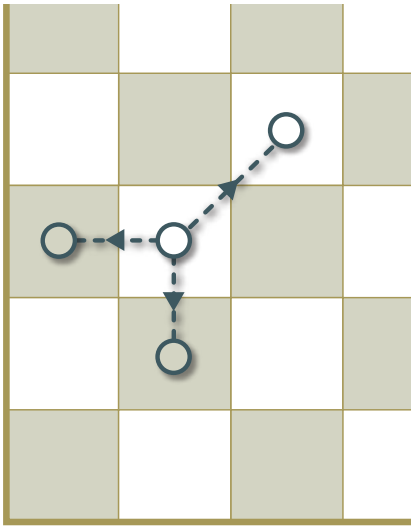
Enfin, la série génératrice des nombres de Fibonacci s'obtient en développant en série de puissances de x la fonction $f(x) = x/(1 - x - x^2)$.

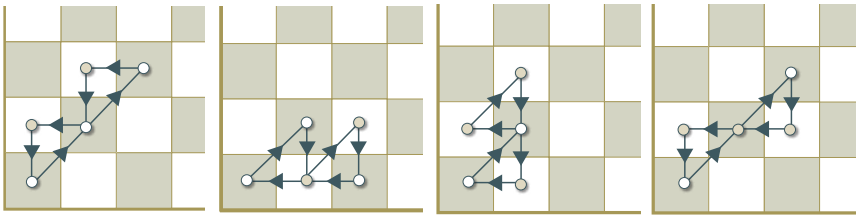
Voici sur un exemple simple le principe de cette approche : si l'on nous donne six termes d'une suite, par exemple 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8 (ce sont les premiers termes de la suite de Fibonacci, *voir l'encadré page 43*), et que l'on nous dit par ailleurs que cette suite vérifie une équation de récurrence d'ordre 2 (à coefficients constants), l'ordinateur propose une unique possibilité : la récurrence $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.

100 dollars pour prouver en moins de cinq pages

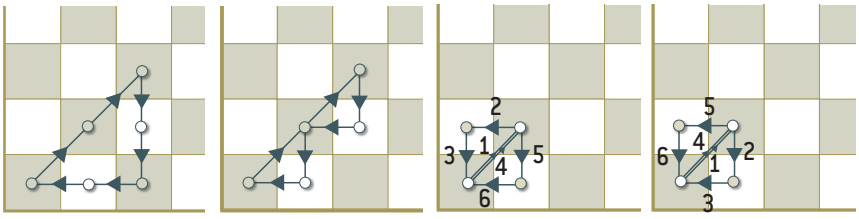
En général, on ne dispose pas d'autant d'informations sur la suite que l'on désire reconstituer grâce à ses premiers termes. En particulier, l'ordre de la récurrence est une inconnue, et le trouver complique beaucoup la méthode. Mais Manuel Kauers et Doron Zeilberger ont surmonté cette difficulté et ont pu appliquer la méthode à la marche de Kreweras. Cette approche ne fonctionnait malheureusement pas pour la marche de Gessel, les calculs impliqués dépassant les capacités des ordinateurs ;

© Pour la Science - n° 449 - Mars 2015





POUR LES MARCHES DE KREWERAS, les déplacements élémentaires autorisés ont pour direction l'Ouest, le Sud ou le Nord-Est *(à gauche)*. En six pas, par exemple, il existe 16 excursions possibles, dont huit sont représentées ici *(ci-dessus et ci-dessous)*.



mais Christoph Koutschan, de l'Institut RICAM en Autriche, trouva une astuce qui permit finalement d'étendre la méthode au cas de la marche de Gessel.

L'été 2008, la conjecture de Gessel devint ainsi le théorème de Kauers, Koutschan et Zeilberger, prouvé grâce à des calculs sur ordinateur. Croyant presque impossible l'existence d'une preuve courte et purement mathématique, Doron Zeilberger promit 100 dollars à quiconque prouverait ce théorème sans ordinateur et en moins de cinq pages.

Des nombres liés par une relation de récurrence

Parallèlement, Manuel Kauers et l'un de nous, Alin Bostan, collaboraient depuis le séminaire de janvier 2008 afin de démontrer que, quel que soit le point d'arrivée A fixé, les nombres de marches se terminant en A satisfont une relation de récurrence. Ils y sont parvenus et ont rendu public leur résultat en août 2008. Bien qu'utilisant également des méthodes informatiques, leurs idées étaient différentes de celles de Manuel Kauers, Christoph Koutschan et Doron Zeilberger. Elles ont permis d'obtenir pour la première fois une formule explicite pour la série génératrice à trois variables, dont les coefficients correspondent aux nombres de marches partant de l'origine et s'achevant au point A, pour tout point A.

Une question restait sans réponse : une preuve purement humaine, sans ordinateur, de ces résultats sur la marche de Gessel est-elle accessible ? Les marches dans un quart de plan apparaissent non seulement en combinatoire, mais dans de nombreux autres domaines : finance, files d'attente, biologie des populations, mécanique statistique, etc. Aussi des méthodes d'étude théorique de ces marches sont-elles apparues dès les années 1970. Les premières, qui concernaient surtout l'aspect aléatoire, sont dues au Français Guy Fayolle et aux Russes Roudolf Iasnogorodski et Vadim Malyshev. Ces chercheurs ont conçu une approche permettant de résoudre des équations fonctionnelles et d'obtenir des expressions explicites de leurs solutions en faisant appel à des techniques élaborées d'analyse complexe (branche de l'analyse mathématique portant sur les fonctions de variables z complexes, c'est-à-dire de la forme $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels et i le symbole vérifiant $i^2 = -1$).

En suivant cette voie, Irina Kurkova, de l'Université Paris 6, et l'un de nous, Kilian Raschel, ont obtenu en 2009 une expression de la fonction génératrice du modèle de Gessel sous la forme d'une intégrale. Cela permet de montrer l'existence de relations de récurrence pour les nombres d'excursions, mais pas de prouver la conjecture de Gessel.

Il existe aussi un modèle probabiliste pour les marches de Gessel, fondé sur un lien direct entre le nombre de chemins du quadrant allant d'un point A à un point B et la probabilité qu'un certain processus aléatoire aille de A à B tout en restant dans le quart de plan. Par cette démarche, en ramenant l'étude du nombre de marches de Gessel au calcul d'une certaine probabilité, le mathématicien chinois Sun Ping réussit en 2009 à prouver deux conjectures

■ BIBLIOGRAPHIE

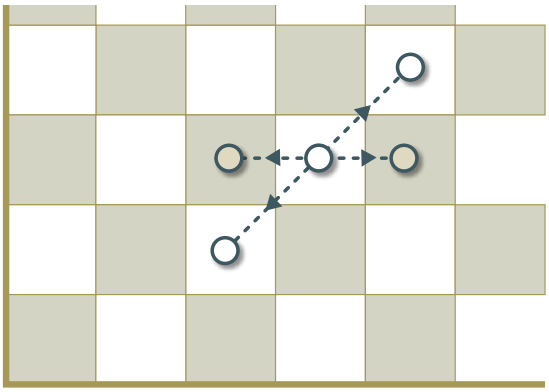
A. Bostan *et al.*, **A human proof of Gessel's lattice path conjecture**, prépublication arXiv:1309.1023, 2013.

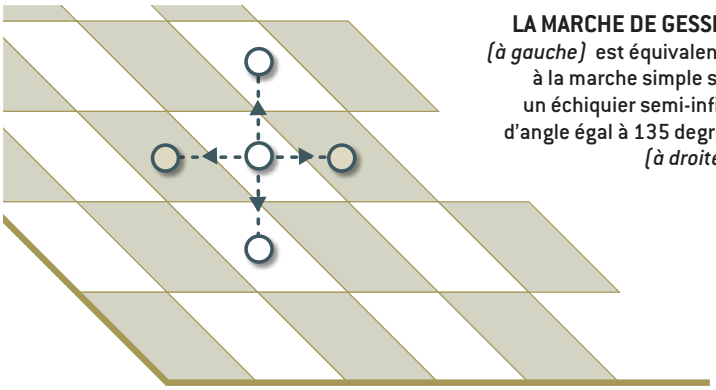
A. Bostan et M. Kauers, **The complete generating function for Gessel walks is algebraic**, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 138, pp. 3063-3078, 2010.

M. Bousquet-Mélou et M. Mishna, **Walks with small steps in the quarter plane**, *Contemporary Mathematics*, vol. 520, pp. 1-40, 2010.

K. Humphreys, **A history and a survey of lattice path enumeration**, *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 140, pp. 2237-2254, 2010.

M. Kauers *et al.*, **Proof of Ira Gessel's lattice path conjecture**, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, vol. 106, pp. 11502-11505, 2009.





LA MARCHE DE GESSEL *(à gauche)* est équivalente à la marche simple sur un échiquier semi-infini d'angle égal à 135 degrés *(à droite)*.

proposées l'année précédente et apparentées à celle de Gessel, mais plus faibles.

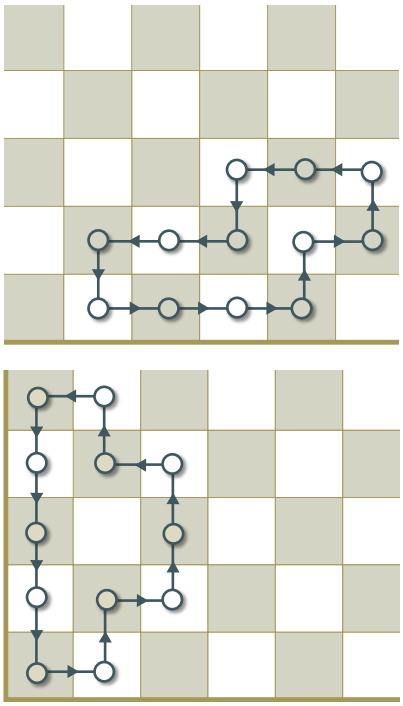
En 2013, en collaboration avec Irina Kurkova, nous avons pu fournir la première preuve purement humaine de la conjecture de Gessel. Notre approche n'utilise que des mathématiques du XIXe siècle (de l'analyse complexe pour l'essentiel). Cela peut paraître surprenant, si l'on compare avec la modernité et la puissance de la preuve par ordinateur rendue publique en 2008.

La démarche peut se résumer en disant que nous prenons trois fois de la hauteur (un procédé omniprésent en mathématiques : plutôt que de s'attaquer directement à un problème, il faut parfois changer d'échelle pour le faire céder).

Prouver sans ordinateur

D'abord, comme beaucoup avant nous, plutôt que de travailler directement sur les nombres de marches, nous considérons leur fonction génératrice. Ensuite, nous considérons non seulement la fonction génératrice des nombres d'excursions (marches partant et revenant à l'origine), mais celle, plus générale, des nombres de chemins partant de l'origine et se terminant en n'importe quel autre point du quart de plan. Enfin, nous étendons, par les méthodes de l'analyse complexe, le domaine sur lequel cette fonction génératrice est *a priori* définie.

En procédant ainsi, nous avons montré qu'une transformation simple de la fonction génératrice donne une fonction dotée d'une double périodicité (alors que des fonctions telles que le sinus n'ont qu'une seule périodicité). Plus précisément, cette fonction appartient à la famille des fonctions dites elliptiques, étudiées au XIXe siècle par des mathématiciens prestigieux, tels le Norvégien Niels Abel et les Allemands Carl Gustav Jacobi et Karl Weierstrass. La double périodicité nous a permis d'exprimer nos fonctions génératrices à l'aide de fonctions spéciales classiques (les « fonctions elliptiques de Weierstrass »).



DEUX EXCURSIONS EN 12 PAS pour la marche simple, l'une sur un demi-plan *(en haut)*, l'autre sur un quart de plan *(en bas)*.

Nous disposions ainsi d'une expression explicite pour la série génératrice des excursions, mais dans un langage très différent de celui intervenant dans la formule initiale proposée par Ira Gessel. Toute la difficulté, que nous avons heureusement pu surmonter, était alors de retrouver cette dernière en utilisant l'arsenal des identités et propriétés vérifiées par les fonctions elliptiques de Weierstrass.

Alors que nous avions presque finalisé d'une preuve « humaine » de la conjecture, Ira Gessel proposa en mars 2013 de nouvelles conjectures. Elles concernent l'existence de formules explicites pour le nombre de chemins partant de l'origine et se terminant en un point donné de l'un des axes. Il est vraisemblable que l'on puisse utiliser notre approche, pour laquelle le point d'arrivée n'est pas essentiel, afin de prouver ces nouvelles conjectures.

Toutefois, notre approche admet aussi des limites, puisqu'elle ne permet pas de répondre aux questions suivantes, qui font l'objet de recherches : que dire des marches où chaque déplacement élémentaire est plus grand que le pas du réseau, c'est-à-dire qui va au-delà des plus proches voisins ? Existe-t-il des formules pour les excursions des marches en trois dimensions, voire en dimension encore supérieure ? Peut-on trouver des preuves plus combinatoires, c'est-à-dire prenant davantage en compte la structure des chemins ? Enfin, notre preuve occupant environ 30 pages, est-il possible de trouver une preuve en moins de cinq pages, objet de la récompense promise par Doron Zeilberger ? L'avenir seul répondra. ■

© Pour la Science - n° 449 - Mars 2015